Existencia y unicidad de soluciones de problemas de valor inicial

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Eduardo Martínez
Universidad de Zaragoza
emf@unizar.es

Zaragoza, 21 de marzo de 2020

Objetivo

- Dar condiciones suficientes que garanticen la existencia y unicidad de solución de un problema de valor inicial para un sistema de ecuaciones diferenciales (no lineal, no autónomo).
- Estudiar el dominio de la solución maximal, y caracterizar cuándo una solución es maximal.

Problema de valor inicial

- $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ conjunto abierto y conexo.

Problema de valor inicial

- $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ conjunto abierto y conexo.
- $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua en $\mathcal{D}$.

Problema de valor inicial

- $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ conjunto abierto y conexo.
- $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua en $\mathcal{D}$.
- Dado $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$ nos planteamos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Problema de valor inicial

- $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ conjunto abierto y conexo.
- $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua en $\mathcal{D}$.
- Dado $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$ nos planteamos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

En componentes: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f(t, x) = \big(f_1(t, x), \ldots, f_n(t, x)\big)$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \qquad \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

Solución

Una solución es una función $\gamma\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ continua y derivable en $I \subset \mathbb{R}$ intervalo, con $t_0 \in I$, tales que

- $\dfrac{d\gamma}{dt}(t) = f(t, \gamma(t))$, para todo $t \in I$,
- $\gamma(t_0) = x_0$,

Solución

Una solución es una función $\gamma\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ continua y derivable en $I \subset \mathbb{R}$ intervalo, con $t_0 \in I$, tales que

- $\dfrac{d\gamma}{dt}(t) = f(t, \gamma(t))$, para todo $t \in I$,
- $\gamma(t_0) = x_0$,
- $(t, \gamma(t)) \in \mathcal{D}$ para todo $t \in I$.

Solución

Una solución es una función $\gamma\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ continua y derivable en $I \subset \mathbb{R}$ intervalo, con $t_0 \in I$, tales que

- $\dfrac{d\gamma}{dt}(t) = f(t, \gamma(t))$, para todo $t \in I$,
- $\gamma(t_0) = x_0$,
- $(t, \gamma(t)) \in \mathcal{D}$ para todo $t \in I$.

Si el intervalo I no es abierto las derivadas en los extremos se entienden como derivadas laterales.

Por ejemplo: si $I = [\alpha, \beta)$, dado que existe el límite lateral $\lim_{t\to\alpha^+} \dot\gamma(t) = f(\alpha, \gamma(\alpha))$, la función γ es derivable por la derecha en $t = \alpha$ y $\dfrac{d^+\gamma}{dt}(\alpha) = \lim_{t\to\alpha^+} \dot\gamma(t) = f(\alpha, \gamma(\alpha))$.

Plan para el capítulo

- Probar la existencia y unicidad local (bajo ciertas hipótesis).

Plan para el capítulo

- Probar la existencia y unicidad local (bajo ciertas hipótesis).
- Probar la existencia y unicidad de una solución maximal.

Plan para el capítulo

- Probar la existencia y unicidad local (bajo ciertas hipótesis).
- Probar la existencia y unicidad de una solución maximal.
- Caracterizar cuándo una solución es maximal o prolongable.

Plan para el capítulo

- Probar la existencia y unicidad local (bajo ciertas hipótesis).
- Probar la existencia y unicidad de una solución maximal.
- Caracterizar cuándo una solución es maximal o prolongable.
- Existencia de solución global, cuando el dominio es sencillo.

Existencia y unicidad local

El teorema de existencia de Peano

Teorema

Sea $f\colon \mathcal{D} \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua en el abierto $\mathcal{D}$. Para cada $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$ existe un intervalo J, que contiene a t_0 en su interior, en el que el problema de valor inicial $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ tiene al menos una solución.

La demostración se basa en el método de Euler progresivo.

El teorema de existencia de Peano

Teorema

Sea $f\colon \mathcal{D} \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua en el abierto $\mathcal{D}$. Para cada $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$ existe un intervalo J, que contiene a t_0 en su interior, en el que el problema de valor inicial $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ tiene al menos una solución.

La demostración se basa en el método de Euler progresivo.

Ejemplo. Consideremos la ecuación diferencial

$$\dot{x} = 1 + 3(t - x)^{2/3}.$$

La función $f(t, x) = 1+3(t-x)^{2/3}$ es continua en $\mathbb{R}^2$. Por tanto, todo problema de valor inicial tiene solución. Sin embargo, en cuanto a la unicidad, para $x(0) = 0$ tenemos dos soluciones: $x = t$ y $x = t^3 + t$. Existen además muchas otras soluciones obtenidas empalmando las anteriores. Puede verse que cualquiera que sea la condición inicial existen varias soluciones.

Plan para esta sección

Según el teorema de Peano la continuidad garantiza la existencia pero no la unicidad (ya vimos en el caso escalar autónomo que esto era así). Para asegurar la unicidad hay que exigir alguna condición adicional.

Plan para esta sección

Según el teorema de Peano la continuidad garantiza la existencia pero no la unicidad (ya vimos en el caso escalar autónomo que esto era así). Para asegurar la unicidad hay que exigir alguna condición adicional.

Seguiremos el siguiente esquema:

- Seleccionar una clase de funciones adecuada: condición de Lipschitz local.

Plan para esta sección

Según el teorema de Peano la continuidad garantiza la existencia pero no la unicidad (ya vimos en el caso escalar autónomo que esto era así). Para asegurar la unicidad hay que exigir alguna condición adicional.

Seguiremos el siguiente esquema:

- Seleccionar una clase de funciones adecuada: condición de Lipschitz local.
- Transformar el PVI a una forma adecuada: ecuación integral equivalente.

Plan para esta sección

Según el teorema de Peano la continuidad garantiza la existencia pero no la unicidad (ya vimos en el caso escalar autónomo que esto era así). Para asegurar la unicidad hay que exigir alguna condición adicional.

Seguiremos el siguiente esquema:

- Seleccionar una clase de funciones adecuada: condición de Lipschitz local.
- Transformar el PVI a una forma adecuada: ecuación integral equivalente.
- Definir una sucesión de funciones asociada a la ecuación integral: iteración de Picard.

Plan para esta sección

Según el teorema de Peano la continuidad garantiza la existencia pero no la unicidad (ya vimos en el caso escalar autónomo que esto era así). Para asegurar la unicidad hay que exigir alguna condición adicional.

Seguiremos el siguiente esquema:

- Seleccionar una clase de funciones adecuada: condición de Lipschitz local.
- Transformar el PVI a una forma adecuada: ecuación integral equivalente.
- Definir una sucesión de funciones asociada a la ecuación integral: iteración de Picard.
- Probar que la sucesión converge a la solución del PVI.

La condición de Lipschitz

Definición

Diremos que una función $f\colon \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ satisface la ***condición de Lipschitz*** en un conjunto $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ si existe $L > 0$ tal que

$$||f(t,y) - f(t,x)|| \leq L||y - x|| \quad \text{para todos } (t,x),(t,y) \in \mathcal{A}.$$

Diremos que f satisface la ***condición de Lipschitz local*** en $\mathcal{D}$ si cada punto $(t,x) \in \mathcal{D}$ tiene un entorno contenido en $\mathcal{D}$ en el que f satisface la condición de Lipschitz.

La condición de Lipschitz

Definición

Diremos que una función $f\colon \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ satisface la ***condición de Lipschitz*** en un conjunto $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ si existe $L > 0$ tal que

$$||f(t,y) - f(t,x)|| \leq L||y - x|| \quad \text{para todos } (t,x),(t,y) \in \mathcal{A}.$$

Diremos que f satisface la ***condición de Lipschitz local*** en $\mathcal{D}$ si cada punto $(t,x) \in \mathcal{D}$ tiene un entorno contenido en $\mathcal{D}$ en el que f satisface la condición de Lipschitz.

Ejemplo. Toda función continua y lineal en las variables x satisface la condición local de Lipschitz. Si $f(t,x) = A(t)x$ con A continua en un intervalo I entonces

$$||f(t,y) - f(t,x)|| = ||A(t)(y - x)|| \leq n||A(t)||\,||y - x||.$$

Dado $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ tomo un intervalo compacto K contenido en I y que contenga a t_0 en su interior, y llamo $L = \max_{t \in K} n||A(t)||$. De esta manera

$$||f(t,y) - f(t,x)|| \leq L||y - x||, \qquad \forall t \in K,\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

La condición de Lipschitz generaliza la condición de tener derivadas direccionales (por la derecha) acotadas. Si $||v|| = 1$ y tomo $y = x + sv$ la condición de Lipschitz local implica que

$$\left\| \frac{f(t, x + sv) - f(t, x)}{s} \right\| \leq L$$

para s cercano a 0.

Teorema

Sea $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un abierto y supongamos que f es continua y tiene derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}$, $i = 1, \ldots, n$, continuas. Entonces f satisface la condición de Lipschitz local.

La condición de Lipschitz generaliza la condición de tener derivadas direccionales (por la derecha) acotadas. Si $||v|| = 1$ y tomo $y = x + sv$ la condición de Lipschitz local implica que

$$\left\| \frac{f(t, x + sv) - f(t, x)}{s} \right\| \leq L$$

para s cercano a 0.

Teorema

Sea $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un abierto y supongamos que f es continua y tiene derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}$, $i = 1, \ldots, n$, continuas. Entonces f satisface la condición de Lipschitz local.

El recíproco no es cierto. Por ejemplo, $f(t, x) = |x|$ satisface la condición de Lipschith con constante $L = 1$,

$$|f(t, y) - f(t, x)| = ||y| - |x|| \leq |y - x|,$$

La condición de Lipschitz generaliza la condición de tener derivadas direccionales (por la derecha) acotadas. Si $||v|| = 1$ y tomo $y = x + sv$ la condición de Lipschitz local implica que

$$\left\| \frac{f(t, x + sv) - f(t, x)}{s} \right\| \leq L$$

para s cercano a 0.

Teorema

Sea $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un abierto y supongamos que f es continua y tiene derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}$, $i = 1, \ldots, n$, continuas. Entonces f satisface la condición de Lipschitz local.

El recíproco no es cierto. Por ejemplo, $f(t, x) = |x|$ satisface la condición de Lipschith con constante $L = 1$,

$$|f(t, y) - f(t, x)| = ||y| - |x|| \leq |y - x|,$$

pero no tiene derivada parcial con respecto a x en los puntos de la forma $(t, 0)$.

Una propiedad que utilizaremos en varias ocasiones es la siguiente.

Teorema

Sea $f\colon \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) para cada compacto $K \subset \mathcal{D}$ la función f satisface la condición de Lipschitz en K.

(b) f satisface la condición de Lipschitz local en $\mathcal{D}$.

Recuérdese que un conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado y acotado.

Ecuación integral equivalente

Proposición

Sea $f\colon \mathcal{D}\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ una función continua y sea $\gamma\colon I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ una función definida en un intervalo $I\subset\mathbb{R}$ tal que $(t,\gamma(t))\in\mathcal{D}$ para todo $t\in I$. Sea $t_0\in I$ y $x_0\in\mathbb{R}^n$ tal que $(t_0,x_0)\in\mathcal{D}$. Las siguientes propiedades son equivalentes:

1. γ es derivable y $x=\gamma(t)$ es una solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

2. γ es continua y satisface

$$\gamma(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau,\gamma(\tau))\,d\tau, \qquad \forall t\in I.$$

Demostración. Por simplicidad, supondremos $t \geq t_0$ (de forma análoga se razona si $t \leq t_0$).

Si $x = \gamma(t)$ es solución del problema de valor inicial dado, entonces satisface $\dot{\gamma}(\tau) = f(\tau, \gamma(\tau))$ para todo $\tau \in I$. Integrando en el intervalo $[t_0, t]$ se obtiene

$$\gamma(t) - \gamma(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(\tau, \gamma(\tau))\, d\tau,$$

y el resultado se sigue sin más que tener en cuenta que $\gamma(t_0) = x_0$. Además γ es continua por ser derivable.

Recíprocamente, supongamos que la función γ es continua y satisface $\gamma(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \gamma(\tau))\, d\tau$. Entonces el integrando $t \mapsto f(t, \gamma(t))$ es una función continua (por ser composición de continuas), por lo que su primitiva $\int_{t_0}^{t} f(\tau, \gamma(\tau))\, d\tau$ es derivable. Por tanto, $\gamma(t)$ es derivable y su derivada es $\dot{\gamma}(t) = f(t, \gamma(t))$, es decir, γ es solución de la ecuación diferencial. Además, en $t = t_0$ se obtiene $\gamma(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(\tau, \gamma(\tau))\, d\tau = x_0$, por lo que γ también satisface las condiciones iniciales.

Iteración de Picard-Lindelöf

Definimos la sucesión de funciones $\{\gamma_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ por recurrencia

$$\begin{cases} \gamma_{k+1}(t) = x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(\tau, \gamma_k(\tau))\, d\tau, \quad k \geq 0 \\ \gamma_0(t) = x_0, \end{cases}$$

procedimiento que se denomina ***iteración de Picard***.

Iteración de Picard-Lindelöf

Definimos la sucesión de funciones $\{\gamma_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ por recurrencia

$$\begin{cases} \gamma_{k+1}(t) = x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(\tau, \gamma_k(\tau))\, d\tau, \quad k \geq 0 \\ \gamma_0(t) = x_0, \end{cases}$$

procedimiento que se denomina ***iteración de Picard***.

Tomando el límite cuando $k \to \infty$, definiendo $\gamma(t) = \lim_{k\to\infty} \gamma_k(t)$ y suponiendo que todo va bien

$$\gamma(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \gamma(\tau))\, d\tau,$$

es decir, γ es solución del PVI.

Iteración de Picard-Lindelöf

Definimos la sucesión de funciones $\{\gamma_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ por recurrencia

$$\begin{cases} \gamma_{k+1}(t) = x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(\tau, \gamma_k(\tau))\, d\tau, & k \geq 0 \\ \gamma_0(t) = x_0, \end{cases}$$

procedimiento que se denomina ***iteración de Picard***.

Tomando el límite cuando $k \to \infty$, definiendo $\gamma(t) = \lim_{k\to\infty} \gamma_k(t)$ y suponiendo que todo va bien

$$\gamma(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \gamma(\tau))\, d\tau,$$

es decir, γ es solución del PVI.

Nuestro trabajo será probar que efectivamente todo va bien.

Una primera cuestión es la existencia de un dominio común a todas las iteradas.

Lema

Sea $f\colon \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua en el abierto $\mathcal{D}$ y sea $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$. Existen $\delta > 0$ y $\rho > 0$ tales que las funciones γ_k definidas por iteración de Picard-Lindelöf están definidas en el intervalo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ y toman valores en la bola cerrada $\bar{B}(x_0, \rho)$, es decir, $\gamma_k\colon [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \bar{B}(x_0, \rho)$.

Demostración. ...

Existencia y unicidad local

Uno de los resultados principales de este tema es el ***teorema de Picard–Lindelöf.***

Teorema

Sea $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua y que satisface la condición de Lipschitz local en $\mathcal{D}$. Para cada $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$ existe un intervalo $J \subset \mathbb{R}$, que contiene a t_0 en su interior, y tal que el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tiene una única solución definida en dicho intervalo J.

En la demostración usaremos el siguiente resultado de Análisis (Criterio M de Weirstrass).

Teorema

Para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea $\varphi_k \colon \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ una función continua en $\mathcal{A}$. Supongamos que existen constantes M_k tales que

$$||\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)|| \leq M_k,$$

para todo $x \in \mathcal{A}$ y todo $k \in \mathbb{N}$, y tales que la serie $\sum_k M_k$ es convergente

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k < +\infty.$$

Entonces, para cada $x \in \mathcal{A}$, la sucesión $\{\varphi_k(x)\}$ es convergente y la función límite (definida por $\varphi(x) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x)$) es una función continua en $\mathcal{A}$.

Además, si $\mathcal{A} = I \times \mathcal{P} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$ con $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo compacto, entonces para cada $\mu \in \mathcal{P}$ y cada $t, t_0 \in I$ se satisface

$$\int_{t_0}^{t} \lim_{k\to\infty} \varphi_k(\tau, \mu)\, d\tau = \lim_{k\to\infty} \int_{t_0}^{t} \varphi_k(\tau, \mu)\, d\tau.$$

Demostración del teorema de Picard. ...

Solución maximal

Primeros resultados

Diremos que un punto $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$ es un ***punto de unicidad local*** de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(t,x)$ si existe un entorno de t_0 en el que hay una única solución del problema de valor inicial $\dot{x} = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$. Si todo punto de $\mathcal{D}$ es de unicidad local diremos que f satisface la propiedad de unicidad local en $\mathcal{D}$.

Primeros resultados

Diremos que un punto $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$ es un ***punto de unicidad local*** de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(t, x)$ si existe un entorno de t_0 en el que hay una única solución del problema de valor inicial $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$. Si todo punto de $\mathcal{D}$ es de unicidad local diremos que f satisface la propiedad de unicidad local en $\mathcal{D}$.

Los resultados que siguen en esta sección asumen que f satisface la propiedad de unicidad local (satisfaga o no la condición de Lipschitz). Para que el siguiente resultado sea válido es esencial que $\mathcal{D}$ sea abierto.

Lema

Sea $\gamma \colon I \to \mathbb{R}^n$ una solución del problema de valor inicial $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$. Si el intervalo I no es abierto, entonces existe un intervalo abierto $\tilde{I}$ que contiene a I y una solución $\tilde{\gamma} \colon \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ de dicho problema tal que $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$ para todo $t \in I$.

Demostración. ...

Lema

Si $\gamma_1 \colon J_1 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ y $\gamma_2 \colon J_2 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ son dos soluciones del mismo problema de valor inicial $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, entonces $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ para todo $t \in J_1 \cap J_2$.

Demostración. ...

Existencia de solución maximal

Teorema

Sea $f\colon \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua tal que todo punto es de unicidad local de $\dot{x} = f(t,x)$. Para cada $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$ consideramos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Existe un único intervalo abierto $J_{t_0,x_0} \subset \mathbb{R}$, que contiene a t_0, y una única función derivable $\gamma_{t_0,x_0} \colon J_{t_0,x_0} \to \mathbb{R}^n$ tales que

1. $x = \gamma_{t_0,x_0}(t)$ es solución del problema de valor inicial dado.
2. Si $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ es otra solución del problema de valor inicial anterior, entonces $I \subset J_{t_0,x_0}$ y γ es la restricción de γ_{t_0,x_0} a I.

Definición

Se dice que γ_{t_0,x_0} es la ***solución maximal*** del problema de valor inicial dado, y que J_{t_0,x_0} es el ***intervalo maximal*** de existencia de solución.

Proposición

Sean $(t_0, x_0), (t_0', x_0') \in \mathcal{D}$ dos datos iniciales.

Las soluciones maximales γ_{t_0,x_0} y $\gamma_{t_0',x_0'}$ son iguales si y solo si $x_0' = \gamma_{t_0,x_0}(t_0')$.

Demostración. ...

Caracterización de la solución maximal

Teorema

Sea $\mathcal{K}$ un compacto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ contenido en el abierto $\mathcal{D}$ y sea $(t_0, x_0) \in \mathcal{K}$. Existen $t_1, t_2 \in J_{t_0,x_0}$ tales que $t_1 < t_0 < t_2$ y los puntos $\big(t_1, \gamma_{t_0,x_0}(t_1)\big)$ y $\big(t_2, \gamma_{t_0,x_0}(t_2)\big)$ están fuera de $\mathcal{K}$ (es decir, están en $\mathcal{D} - \mathcal{K}$).

Demostración. ...

Corolario

Sea $\gamma\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ una solución del problema de valor inicial $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$.

- Si existe un compacto $\mathcal{K} \subset \mathcal{D}$ tal que $(t, \gamma(t)) \in \mathcal{K}$ para todo $t \in [t_0, \beta)$, entonces $\beta < \tau^+_{t_0,x_0}$, es decir, dicha solución puede prolongarse por la derecha.
- Si existe un compacto $\mathcal{K} \subset \mathcal{D}$ tal que $(t, \gamma(t)) \in \mathcal{K}$ para todo $t \in (\alpha, t_0]$, entonces $\alpha > \tau^-_{t_0,x_0}$, es decir, dicha solución puede prolongarse por la izquierda.

Si $\tau^+_{t_0,x_0}$ es finito entonces, cuando $t \to \tau^+_{t_0,x_0}$, o bien la solución $\gamma_{t_0,x_0}(t)$ no está acotada, o bien $\gamma_{t_0,x_0}(t)$ se acerca a la frontera de $\mathcal{D}$, o ambos.

El mismo resultado se obtiene cuando $\tau^-_{t_0,x_0}$ es finito y $t \to \tau^-_{t_0,x_0}$.

Soluciones globales

Dominios cilíndricos

Se dice que el dominio de la función f es un cilindro si es el producto cartesiano $\mathcal{D} = (a, b) \times \mathcal{U}$ de un intervalo abierto (a, b) de la recta real por un abierto conexo $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$.

Dominios cilíndricos

Se dice que el dominio de la función f es un cilindro si es el producto cartesiano $\mathcal{D} = (a, b) \times \mathcal{U}$ de un intervalo abierto (a, b) de la recta real por un abierto conexo $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$. Diremos que un problema de valor inicial tiene ***solución global*** si el dominio de la solución maximal coincide con el citado intervalo (a, b).

Dominios cilíndricos

Se dice que el dominio de la función f es un cilindro si es el producto cartesiano $\mathcal{D} = (a, b) \times \mathcal{U}$ de un intervalo abierto (a, b) de la recta real por un abierto conexo $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$. Diremos que un problema de valor inicial tiene ***solución global*** si el dominio de la solución maximal coincide con el citado intervalo (a, b). Diremos que una ecuación diferencial $\dot{x} = f(t, x)$ tiene solución global si todo problema de valor inicial tiene solución global, es decir, si $J_{t_0,x_0} = (a, b)$ para todos $t_0 \in (a, b)$ y $x_0 \in \mathcal{U}$.

Dominios cilíndricos

Se dice que el dominio de la función f es un cilindro si es el producto cartesiano $\mathcal{D} = (a,b) \times \mathcal{U}$ de un intervalo abierto (a,b) de la recta real por un abierto conexo $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$. Diremos que un problema de valor inicial tiene ***solución global*** si el dominio de la solución maximal coincide con el citado intervalo (a,b). Diremos que una ecuación diferencial $\dot{x} = f(t,x)$ tiene solución global si todo problema de valor inicial tiene solución global, es decir, si $J_{t_0,x_0} = (a,b)$ para todos $t_0 \in (a,b)$ y $x_0 \in \mathcal{U}$.

- **Nos centramos en el caso $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$.**

Dominios cilíndricos

Se dice que el dominio de la función f es un cilindro si es el producto cartesiano $\mathcal{D} = (a, b) \times \mathcal{U}$ de un intervalo abierto (a, b) de la recta real por un abierto conexo $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$. Diremos que un problema de valor inicial tiene ***solución global*** si el dominio de la solución maximal coincide con el citado intervalo (a, b). Diremos que una ecuación diferencial $\dot{x} = f(t, x)$ tiene solución global si todo problema de valor inicial tiene solución global, es decir, si $J_{t_0,x_0} = (a, b)$ para todos $t_0 \in (a, b)$ y $x_0 \in \mathcal{U}$.

Nos centramos en el caso $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$.

Cuando el dominio es $\mathcal{D} = (a, b) \times \mathbb{R}^n$, los resultados anteriores expresan que si una solución no tiene el mayor dominio posible, esto es, tiene dominio menor que (a, b), entonces dicha solución no está acotada. Más concretamente, si $\tau^+_{t_0,x_0} < b$ entonces $\lim_{t \to \tau^+_{t_0,x_0}} ||\gamma_{t_0,x_0}(t)|| = \infty$, y si $\tau^-_{t_0,x_0} > a$ entonces $\lim_{t \to \tau^-_{t_0,x_0}} ||\gamma_{t_0,x_0}(t)|| = \infty$ (entendidos ambos como limites laterales).

Sublinealidad

Definición

Se dice que la función $f\colon (a,b)\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es ***sublineal*** si existen dos funciones continuas $\alpha,\beta\colon (a,b)\to\mathbb{R}$, con $\alpha(t)\geq 0$ para todo $t\in(a,b)$, y tales que

$$||f(t,x)|| \leq \alpha(t)||x|| + \beta(t), \qquad \forall t\in(a,b),\ \forall x\in\mathbb{R}^n.$$

Sublinealidad

Definición

Se dice que la función $f\colon (a,b)\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es ***sublineal*** si existen dos funciones continuas $\alpha,\beta\colon (a,b)\to\mathbb{R}$, con $\alpha(t)\geq 0$ para todo $t\in(a,b)$, y tales que

$$||f(t,x)|| \leq \alpha(t)||x|| + \beta(t), \qquad \forall t\in(a,b),\ \forall x\in\mathbb{R}^n.$$

Teorema

Supongamos que f es continua en $\mathcal{D}=(a,b)\times\mathbb{R}^n$ y que todo punto es de unicidad local de la ecuación diferencial $\dot{x}=f(t,x)$. Si la función f es sublineal entonces la ecuación diferencial tiene solución global.

Demostración. ...

Proposición

La ecuación diferencial $\dot{x} = f(t, x)$ tiene solución global si se satisface alguna de las siguientes condiciones:

- f está acotada en $\mathcal{D} = (a, b) \times \mathbb{R}^n$, es decir, existe $M \geq 0$ tal que

$$||f(t, x)|| \leq M, \qquad \forall t \in (a, b), \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

- f satisface la condición de Lipschitz global en $\mathcal{D} = (a, b) \times \mathbb{R}^n$: existe $L > 0$ tal que

$$||f(t, y) - f(t, x)|| \leq L||y - x||,, \qquad \forall t \in (a, b), \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

- Existen funciones continuas $\alpha, \beta \colon (a, b) \to \mathbb{R}$, con $\alpha(t) \geq 0$ y tales que

$$||f(t, y) - f(t, x)|| \leq \alpha(t)||y - x|| + \beta(t), \qquad \forall t \in (a, b), \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

La demostración de este resultado se propone como ejercicio.

En el tema sobre sistemas lineales con coeficientes variables dejamos sin demostración el teorema de existencia y unicidad. Éste se obtiene hora como consecuencia de todo lo anterior.

Corolario

Para una ecuación diferencial lineal $\dot{X} = A(t)X + b(t)$ definida en un intervalo I, con $A(t)$ continua, la solución de cada problema de valor inicial es única y es global.

Demostración. Identificando n-tuplas con vectores columna la función f es $f(t,x) = A(t)x + b(t)$. Esta función es sublineal

$$||f(t,x)|| \leq n||A(t)||\,||x|| + ||b(t)||.$$

Si I es abierto entonces la solución es global. Si I no es abierto podemos extender $A(t)$ de manera continua a un intervalo abierto dándole a $A(t)$ un valor constante. $\square$

Ecuaciones de orden superior

Transformación a sistema de orden 1

Un sistema de ecuaciones de orden mayor que uno se puede transformar en un sistema de primer orden equivalente introduciendo variables auxiliares que reemplazan las derivadas.

Transformación a sistema de orden 1

Un sistema de ecuaciones de orden mayor que uno se puede transformar en un sistema de primer orden equivalente introduciendo variables auxiliares que reemplazan las derivadas.

Ejemplo. Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = 3t\dot{y}_2 - y_1 y_2 \\ \dddot{y}_2 = y_1(t^2 + \ddot{y}_2). \end{cases}$$

Transformación a sistema de orden 1

Un sistema de ecuaciones de orden mayor que uno se puede transformar en un sistema de primer orden equivalente introduciendo variables auxiliares que reemplazan las derivadas.

Ejemplo. Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = 3t\dot{y}_2 - y_1 y_2 \\ \dddot{y}_2 = y_1(t^2 + \ddot{y}_2). \end{cases}$$

Definiendo $x_1 = y_1$, $x_2 = \dot{y}_1$, $x_3 = y_2$, $x_4 = \dot{y}_2$, $x_5 = \ddot{y}_2$ obtenemos el sistema

$$(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dot{x}_4, \dot{x}_5) = \big(x_2, 3tx_4 - x_1 x_3, x_4, x_5, x_1(t^2 + x_5)\big).$$

Como es C^1 todo punto es de unicidad local.

Transformación a sistema de orden 1

Un sistema de ecuaciones de orden mayor que uno se puede transformar en un sistema de primer orden equivalente introduciendo variables auxiliares que reemplazan las derivadas.

Ejemplo. Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = 3t\dot{y}_2 - y_1 y_2 \\ \dddot{y}_2 = y_1(t^2 + \ddot{y}_2). \end{cases}$$

Definiendo $x_1 = y_1$, $x_2 = \dot{y}_1$, $x_3 = y_2$, $x_4 = \dot{y}_2$, $x_5 = \ddot{y}_2$ obtenemos el sistema

$$(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dot{x}_4, \dot{x}_5) = \big(x_2, 3tx_4 - x_1x_3, x_4, x_5, x_1(t^2 + x_5)\big).$$

Como es C^1 todo punto es de unicidad local.

Las condiciones iniciales que aseguraran la unicidad de solución, son del tipo

$$y_1(t_0) = y_{1,0},\; \dot{y}_1(t_0) = y_{1,1},\; y_2(t_0) = y_{2,0},\; \dot{y}_2(t_0) = y_{2,1},\; \ddot{y}_2(t_0) = y_{2,2}.$$

En general, dado un sistema de m ecuaciones diferenciales en las variables $(y_1, \ldots, y_m)$ de orden k_α en la variable y_α, $\alpha = 1, \ldots, m$, podemos introducir variables auxiliares $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, con $n = \sum_{\alpha=1}^m k_\alpha$, para cada una de las derivadas de orden menor que el máximo que aparece en la ecuación, incluyendo la derivada de orden 0, es decir, la propia función. Si las funciones que definen la derivada de orden más alto de cada variable en términos del resto de derivadas de orden menor son funciones continuas, entonces el sistema obtenido $\dot{x} = f(t, x)$ es también continuo. Si las citadas funciones satisfacen la condición de Lipschitz local, entonces f satisface la condición de Lipschitz local. De esta manera, toda la teoría desarrollada se puede aplicar también a sistemas de ecuaciones diferenciales de orden superior a 1. Bajo estas condiciones, la solución $y_\alpha = \gamma_\alpha(t)$, $\alpha = 1, \ldots, m$, es una función de clase $C^{k_\alpha+1}$.

Resumen

- Si f es continua, el PVI tiene al menos una solución local.

Resumen

- Si f es continua, el PVI tiene al menos una solución local.
- Si f satisface la condición de Lipschitz local todo punto es de unicidad local.

Resumen

- Si f es continua, el PVI tiene al menos una solución local.
- Si f satisface la condición de Lipschitz local todo punto es de unicidad local.
- Si todo punto es de unicidad local existe una única solución maximal.

Resumen

- Si f es continua, el PVI tiene al menos una solución local.
- Si f satisface la condición de Lipschitz local todo punto es de unicidad local.
- Si todo punto es de unicidad local existe una única solución maximal.
- Si $\mathcal{D} = (a, b) \times \mathbb{R}^n$ y la ecuación diferencial es sublineal entonces toda solución es global.