17. Propiedades cualitativas

Estabilidad

155.– Sea p un punto de equilibrio de un sistema unidimensional autónomo $\dot{x} = f(x)$, con f continua en $\mathbb{R}$ y derivable en p. Demuestra que si existe $r > 0$ tal que $f(x) < 0$ para $x \in (p, p + r)$ y $f(x) > 0$ para $x \in (p - r, p)$ entonces p es asintóticamente estable. Demuestra que si existe un entorno reducido de p en el que f tiene signo definido, entonces p es inestable. Prueba que si $(x - p)f(x) > 0$ en algún entorno reducido de p entonces p es inestable. Dibuja las distintas situaciones anteriores en el diagrama de fases.

Nota: Los resultados anteriores son intuitivamente obvios. Lo que se pide es una demostración de dichos resultados.

156.– Para las siguientes ecuaciones diferenciales, el punto $x = 0$ es un punto de equilibrio. Analiza su estabilidad.

1. $\dot{x} = x^3 \operatorname{sen}(x^2)$,
2. $\dot{x} = x^2 \operatorname{sen}(x^2)$,
3. $\dot{x} = x^2(\operatorname{sen}(x) - \tan(x))$.

157.– Proporciona ejemplos explícitos de ecuaciones diferenciales $\dot{x} = f(x)$ que satisfagan las siguientes propiedades:

1. Tiene exactamente dos puntos de equilibrio ambos inestables.
2. Tiene exactamente un punto de equilibrio estable, pero no asintóticamente estable.
3. Tiene infinitos puntos de equilibrio, todos ellos inestables.
4. Tiene exactamente dos puntos de equilibrio, uno estable y otro inestable.

158.– Encuentra los puntos de equilibrio de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales y estudia su estabilidad

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - 3x + 2 \\ \dot{y} = x^2 - y^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + x^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{sen}(x + y) \\ \dot{y} = y \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = -x\cos(y) \\ \dot{y} = -y\cos(x). \end{cases}$$

159.– Analiza la estabilidad de los puntos de equilibrio de las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $\ddot{y} = y\mathrm{e}^{-y^2}$.
2. $\ddot{y} + 2\dot{y} + 5y + y^3 = 0$.

3. $\begin{cases} \dot{x} = y - x - x^2 \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$

4. $\ddot{y} - y|y| = 0.$

160.– Consideremos la ecuación diferencial $\ddot{x} + g(x) = 0$, donde g es de clase C^1 en $\mathbb{R}$. Sea p un cero de g tal que $g'(p) < 0$. Prueba que p es un punto de equilibrio inestable. Interpreta las condiciones anteriores en términos de la función $V(x) = \int_p^x g(s)\,ds$ (energía potencial).

Órbitas de sistemas autónomos en el plano

161.– Halla las órbitas de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales

1. $\begin{cases} \dot{x} = 2x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = y. \end{cases}$

162.– Un sistema lineal homogéneo de coeficientes constantes es un centro si y sólo si la matriz del sistema tiene traza nula y determinante positivo, es decir, es de la forma

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -c & -a \end{bmatrix} \qquad \text{con } bc > a^2.$$

Como sabemos, las trayectorias son elipses centradas en el origen. Halla la ecuación implícita de las trayectorias. A partir de ésta, indica cómo se pueden calcular sus ejes y su excentricidad. Relaciona tus resultados con los obtenidos anteriormente para sistemas lineales.

163.– Consideremos un péndulo, cuya evolución temporal viene descrita por la ecuación diferencial $\ddot{x} + \omega^2 \operatorname{sen}(x) = 0$. Plantea el sistema de primer orden equivalente y halla las órbitas. ¿Cuál es el significado de la solución implícita $F(x, \dot{x}) = c$?

Diagramas de fases

164.– Dibuja los diagramas de fases de los siguientes sistemas planos.

1. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2 - 1 \\ \dot{y} = xy. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = \operatorname{sen}(x). \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 - y^2 \\ \dot{y} = xy. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 1 \\ \dot{y} = xy. \end{cases}$

165.– Un modelo para la evolución de un sistema predador-presa viene dado por el sistema de ecuaciones diferenciales de Lotka-Volterra,

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta xy \\ \dot{y} = \delta xy - \gamma y, \end{cases}$$

donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son constantes positivas. En estas ecuaciones, la variable x representa el número de presas, mientras que la variable y representa el número de predadores, siendo ambas no negativas. Halla la ecuación de las órbitas y resuélvela. Representa el diagrama de fases y explica el comportamiento cualitativo de las soluciones en términos de las poblaciones citadas.

Trayectorias ortogonales

166.– Halla la familia de curvas ortogonal a la familia de circunferencias de centro en el eje X y que pasan por el origen.

167.– Halla las trayectorias ortogonales a las siguientes familias de curvas

1. $xy = c$
2. $y = cx^2$

168.– Calcula la familia de curvas que forma un ángulo de 45 grados con la familia de circunferencias cuyo centro está en la bisectriz del primer cuadrante y pasan por el origen.

169.– Prueba que las trayectorias ortogonales a una familia de curvas dada en coordenadas polares (r, θ) por la ecuación diferencial

$$\frac{dr}{d\theta} = f(r, \theta)$$

verifica la ecuación

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{r^2}{f(r, \theta)}.$$

Calcula las trayectorias ortogonales a las siguientes familias de curvas

1. $r = 2c \operatorname{sen} \theta$
2. $r = c/(1 - \cos \theta)$