16. Regularidad de la solución general

141.– Halla la solución general maximal de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = x^2 - y \\ \dot{z} = x^2 - z. \end{cases}$$

142.– Halla la solución general maximal de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = y + \frac{1}{x}. \end{cases}$$

143.– Para las ecuaciones diferenciales de los ejercicios 141 y 142 calcula las derivadas parciales con respecto a los datos iniciales de la solución general hallada. Por otro lado, plantea y resuelve la ecuación variacional para hallar, de nuevo, dichas derivadas parciales por medio de la ecuación variacional.

144.– El problema de valor inicial $\dot{x} = (x-1)(t+x^2)$ con $x(0) = 1$ tiene por solución $x(t) = 1$. Halla el valor de las derivadas parciales de la solución general con respecto a las condiciones y al tiempo iniciales en $t_0 = 0$, $x_0 = 1$.

145.– Comprueba que el problema de valor inicial dado por las ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + (t-x)y \\ \dot{y} = y \end{cases}$$

y las condiciones iniciales $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ tiene solución $(x(t), y(t)) = (t, 0)$. Halla la linealización de dicha ecuación diferencial a lo largo de esta solución. Halla la derivada parcial en el punto $(t_0 = 0, x_0 = 0, y_0 = 0)$ de la solución general con respecto al tiempo inicial y también con respecto a las condiciones iniciales.

146.– Sea $\dot{x} = f(t,x)$ una ecuación diferencial, con $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^1 en el abierto $\mathcal{D}$, y sea $\psi(t,\tau,x)$ la solución general maximal. Prueba que la solución general maximal del problema de valor inicial definido en $\mathbb{R}^{2n}$ por

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ \dot{w} = D_x f(t,x) w \\ x(t_0) = x_0 \\ w(t_0) = w_0 \end{cases}$$

es $\big(x(t), w(t)\big) = \big(\psi(t, t_0, x_0), D_x\psi(t, t_0, x_0)w_0\big)$.
Ayuda: ten en cuenta el problema 136, y la teoría ¡claro!

147.– Consideremos una ecuación diferencial autónoma $\dot{x} = f(x)$, con f de clase C^1 en un cierto abierto de $\mathbb{R}^n$. Sea $\gamma(t)$ la solución que satisface $x(0) = x_0$. Prueba que la derivada de la solución general con respecto a t_0 es $\frac{\partial\psi}{\partial t_0}(t, 0, x_0) = -f(\gamma(t))$. Deduce de este hecho que $w(t) = f(\gamma(t))$ es una solución de la ecuación variacional a lo largo de $\gamma(t)$.
Ayuda: la solución de la ecuación diferencial con $x(t_0) = x_0$ es $\gamma(t-t_0)$.

148.– Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales de orden k

$$y^{(k)} = g(t, y, \dot{y}, \ldots, y^{(k-1)})$$

donde g es una aplicación de clase C^1. Prueba que la solución general maximal $y(t, t_0, y_0, y_0^{(1)}, \ldots, y_0^{(k-1)})$, junto con sus derivadas parciales con respecto a t hasta orden k, son funciones diferenciables de clase C^1. Halla las ecuaciones diferenciales que satisfacen las derivadas parciales de dicha función con respecto a las condiciones iniciales $(y_0, y_0^{(1)}, \ldots, y_0^{(k-1)})$, y prueba que dichas ecuaciones también son ecuaciones diferenciales de orden k.

149.– Consideremos la ecuación diferencial $\dot{x} = \mu - x$ y sea $\psi(t, t_0, x_0, \mu)$ el valor en t de la solución de dicha ecuación que pasa por (t_0, x_0). Calcula las derivadas parciales de ψ. Resuelve la ecuación diferencial y calcula de nuevo dichas derivadas.

150.– Consideremos la ecuación diferencial lineal de segundo orden $\ddot{y}+\mu y = 0$. Para $\mu > 0$, la ecuación describe un oscilador armónico de frecuencia $\sqrt{\mu}$; para $\mu < 0$ la ecuación describe el movimiento de una partícula en un lanzador centrífugo que gira con velocidad angular $\sqrt{-\mu}$; para $\mu = 0$ la ecuación describe el movimiento de un partícula libre. Utilizando la teoría estudiada en clase, analiza la diferenciabilidad de las soluciones con respecto al parámetro μ. Además, para simplificar, fijemos las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 0$. Halla la solución explícitamente y vuelve a analizar la diferenciabilidad de la solución a partir de la expresión encontrada.

151.– Comprueba que el problema de valor inicial dado por las ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = -y + \mu x(1 - x^2 - y^2) \qquad \dot{y} = x + \mu y(1 - x^2 - y^2)$$

y las condiciones iniciales $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ tiene solución $(x(t), y(t)) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$. Halla la linealización de dicha ecuación diferencial a lo largo de esta solución y resuélvela (prueba con términos de la forma $e^{at}\operatorname{sen} t$ y $e^{at}\cos t$). Halla la derivada parcial de la solución general con respecto μ en $\mu = 0$ (y con $t_0 = 0$, $x_0 = 1$ e $y_0 = 0$).

152.– Prueba que para todo $\mu \geq 0$ la solución $y = \gamma(t,\mu)$ del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \ddot{y} + \mu\dot{y} + y^3 = 0 \\ y(0) = 1 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$$

está definida en el intervalo $[0,\infty)$ y $\lim_{\mu\to 0} y(t,\mu) = y(t,0)$ para todo $t \geq 0$.
Ayuda: Considera la función $E = \frac{1}{2}\dot{y}^2 + \frac{1}{4}y^4$.

153.– Comprueba que para todo $\mu > 0$ la solución $x = \gamma(t,\mu)$ del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \mu\dot{x} = -x^3 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

está definida en el intervalo $[0,\infty)$ pero $\lim_{\mu\to 0}\gamma(t,\mu)$ no es solución del problema anterior para $\mu = 0$.

154.– Para cada $\mu \in \mathbb{R}$ consideremos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = (1+\mu)x - \mu x^2 - 1 \\ x(0) = 2 \end{cases}$$

y sea $x(t,\mu)$ su solución.

1. Demuestra que para $0 \leq \mu \leq 1/2$, la solución $x(t,\mu)$ está definida en $\mathbb{R}$.
2. Prueba que para todo $T > 0$ existe $\mu_0 < 0$ tal que si $\mu_0 < \mu < 0$ entonces $x(t,\mu)$ está definida en el intervalo $[0,T]$.
3. Calcula $\frac{\partial x}{\partial \mu}(t,0)$.