## 15. Existencia y unicidad

**123.–** Para las siguientes funciones, halla una constante de Lipschitz o prueba que no existe.

1. $f(t,x) = |x|$, $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
2. $f(t,x) = tx^{1/3}$, $\mathcal{D} = [-10,10] \times [-1,1]$.
3. $f(t,x) = 1/(tx)$, $\mathcal{D} = [1,+\infty) \times [1,+\infty)$.
4. $f(t,x) = x \ln |x|$, si $x \neq 0$, y $f(0) = 0$, $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times [-1,1]$.

**124.–** Supongamos que $f_1$ y $f_2$ son funciones que satisfacen la condición de Lipschitz en un conjunto $\mathcal{A}$ con constantes respectivas $L_1$ y $L_2$. Si $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ prueba que la función $c_1 f_1 + c_2 f_2$ satisface también la condición de Lipschitz en $\mathcal{A}$ y halla una constante de Lipchitz.

**125.–** Supongamos que $f\colon \mathcal{B} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ y $g\colon \mathcal{A} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ son funciones que satisfacen la condición de Lipschitz en sus respectivos dominios. Estudia si la función $\varphi\colon \mathcal{A} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ definida mediante 'composición' $\varphi\colon (t,x) \mapsto f(t, g(t,x))$ satisface también la condición de Lipschitz.

**126.–** Estudia la existencia y unicidad de solución para los siguientes problemas de valor inicial:

1. $\dot{x} = |x| + x^2 - 3t^2, \ \ x(t_0) = x_0$.
2. $\dot{x} = g(x) + \mathrm{e}^t/(t^2+1), \ \ x(t_0) = x_0$, siendo

$$g(x) = \begin{cases} \cos(x) & x \geq 0 \\ 1 & x < 0. \end{cases}$$

**127.–** Resuelve los siguientes problemas de valor inicial, determinando el intervalo maximal de existencia de la solución:

1. $\dot{x} = \dfrac{2t}{x + t^2 x}, \quad x(2) = 3$
2. $\dot{x} = \dfrac{3t^2 + 4t + 2}{2(x-1)}, \quad x(0) = -1$
3. $\dot{x} = x^2 - 2x, \quad x(0) = 1$.

**128.–** Sea $f\colon \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua en el abierto $\mathcal{D}$. Demuestra que si existe un producto escalar $\langle\ ,\ \rangle$ y una función continua $\ell(t)$ tales que

$$\langle f(t,y) - f(t,x), y - x \rangle \leq \ell(t) \langle y - x, y - x \rangle,$$

para todos $(t, x), (t, y) \in \mathcal{D}$, entonces todo problema de valor inicial $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, con $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$, tiene solución única a derechas. Ayuda: dadas dos soluciones, $x = \gamma(t)$ y $x = \eta(t)$, considerar la función $\langle \gamma(t) - \eta(t), \gamma(t) - \eta(t) \rangle$.

**129.–** Sea $\mathcal{D}$ un abierto de $\mathbb{R}^2$ y sean $f, F \colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que

$$f(t, x) < F(t, x), \qquad \forall (t, x) \in \mathcal{D}.$$

Sea $x = \gamma(t)$ una solución de $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, y sea $x = \Gamma(t)$ una solución de $\dot{x} = F(t, x)$, $x(t_0) = X_0$, ambas definidas en el mismo intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Prueba que si $x_0 < X_0$ entonces $\gamma(t) < \Gamma(t)$ para todo $t \geq t_0$, $t \in I$.
Ayuda: razonar, por reducción al absurdo, sobre el primer tiempo en el que las dos soluciones son iguales.

**130.–** Demuestra que si los grafos de dos soluciones de una ecuación diferencial $\dot{x} = f(t, x)$ (con $f$ continua y satisfaciendo la condición de Lipschitz local) se cortan en algún punto, entonces dichas soluciones son iguales en la intersección de sus dominios. Recuerda que el grafo de una función $f \colon A \to B$ es el conjunto $\mathrm{Gr}(f) = \{ (a, f(a)) \mid a \in A \}$.

**131.–** Prueba que todo problema de valor inicial para la ecuación diferencial $\dot{x} = \cos(tx^2)$ tiene una única solución, y que ésta está definida en toda la recta real.

**132.–** Sea $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x - 9 & x \in (-\infty, -1] \\ x(9 - x^2) & x \in (-1, 1) \\ -x + 9 & x \in [1, +\infty). \end{cases}$$

Demuestra que, para todos los $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$, el problema de valor inicial $\dot{x} = f(x)$, $x(t_0) = x_0$ tiene una única solución, y que está definida en todo $\mathbb{R}$.

**133.–** Consideremos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = 3|x| \\ \dot{y} = \sqrt[3]{x}y \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Halla su solución y comprueba que está definida en toda la recta real.

**134.–** La solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 \\ \dot{y} = \operatorname{sen}(x) \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

¿está definida en todo $\mathbb{R}$?

**135.–** Analiza si el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = \text{máx}\{t, x\} \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

tiene solución única, y si está definida en todo $\mathbb{R}$.
Ayuda: considerar la función $\varphi(t,x) = (t+x) + |t-x|$.

**136.–** Sea $f\colon \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua satisfaciendo la condición de Lipschitz local y sea $A\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}^{(n,n)}$ una función continua. Prueba que, para cada $(t_0, x_0, v_0) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}^n$, el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ \dot{v} = A(t,x)v \\ x(t_0) = x_0 \\ v(t_0) = v_0 \end{cases}$$

tiene una única solución. Encuentra el intervalo maximal de la solución de este problema en términos del intervalo maximal de la solución del problema $\dot{x} = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$.

**137.–** Halla el intervalo maximal de definición de la solución del problema

$$\begin{cases} \dddot{y} + y\cos(y) - \ln t = 0 \\ y(1) = 1 \\ \dot{y}(1) = 2 \\ \ddot{y}(1) = 3. \end{cases}$$

**138.–** Sea $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ un abierto y sea $g\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ una función continua, tal que todo punto de $\mathcal{D}$ tiene un entorno tal que

$$|g(t, z_1, z_2) - g(t, x_1, x_2)| \leq L\, \text{máx}\big\{|z_1 - x_1|, |z_2 - x_2|\big\},$$

para cierta constante $L > 0$ y para toda pareja de puntos $(t, x_1, x_2)$, $(t, z_1, z_2)$ en dicho entorno. Demuestra que para cada $(t_0, y_0, v_0) \in \mathcal{D}$, existe un único intervalo abierto $J_{t_0,y_0,v_0} \subset \mathbb{R}$ y una única solución $y = \gamma_{t_0,x_0,v_0}(t)$ del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \ddot{y} = g(t, y, \dot{y}) \\ y(t_0) = y_0 \\ \dot{y}(t_0) = v_0, \end{cases}$$

definida en dicho intervalo, tal que si $\eta\colon I \to \mathbb{R}$ es otra solución de dicho problema, entonces $I \subset J_{t_0,y_0,v_0}$ y $\eta(t) = \gamma_{t_0,y_0,v_0}(t)$ para todo $t \in I$.

**139.–** Prueba que toda solución de la ecuación diferencial de un péndulo con rozamiento

$$ml^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgl\,\mathrm{sen}(\theta) = 0,$$

(todos los parámetros $m, l, g, b$ son positivos) está definida en todo $\mathbb{R}$.

**140.–** Prueba que toda solución de la ecuación diferencial

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0,$$

con $\mu > 0$, está definida (al menos) en $[0, +\infty)$.
*Ayuda:* Convierte a sistema de primer orden con las variables $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, y considera la derivada de $D(t) = x_1(t)^2 + x_2(t)^2$ (i.e. de la distancia al origen elevada al cuadrado).