

14. ECUACIONES ESCALARES NO AUTÓNOMAS: MÉTODOS CLÁSICOS DE INTEGRACIÓN

**Separables**

108.– Resuelve (hallando la solución implícita) las siguientes ecuaciones diferenciales:

1.  $t^2 \dot{x} = 1$
2.  $\dot{x} = \frac{x^3}{t^2}$
3.  $dx = e^{3t+2x} dt$
4.  $(4x + xt^2)\dot{x} = 2t + tx^2$
5.  $tx\dot{x} \ln t = (x + 1)^2$ .

109.– Resuelve los siguientes problemas de valor inicial:

1.  $\text{sen}(t)(e^{-x} + 1) + (1 + \cos t)\dot{x} = 0, \quad x(0) = 0$
2.  $x\dot{x} = 4t\sqrt{x^2 + 1}, \quad x(0) = 1$
3.  $\dot{x} = 4(t^2 + 1), \quad x(0) = 3$
4.  $t^2 dx + (tx - x)dt = 0, \quad x(-1) = -1$ .

110.– Consideremos una ecuación diferencial separable  $\dot{x} = g(t)f(x)$ , con  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  continuas. Utilizando razonamientos similares a los que se usaron al estudiar la ecuaciones autónomas, discute la existencia y unicidad de las soluciones. Enuncia algunas propiedades del intervalo maximal de una solución. Para simplificar, se puede suponer inicialmente que  $g$  tiene signo constante, para luego estudiar el caso general.

**Exactas**

111.– Determina si las siguientes ecuaciones diferenciales son exactas, y si lo son, resuélvelas.

1.  $5t + 4x + (4t - 8x^3)\dot{x} = 0$
2.  $(2x - \frac{1}{t} + \cos 3t)\dot{x} + \frac{x}{t^2} - 4t^3 + 3x \text{sen } 3t = 0$
3.  $x \ln x - e^{-tx} + (\frac{1}{x} + t \ln x)\dot{x} = 0$
4.  $(x^3 - x^2 \text{sen } t - t)dt + (3tx^2 + 2x \cos t)dx = 0$
5.  $(e^x + 2tx \cosh t)\dot{x} + tx^2 \sinh t + x^2 \cosh t = 0$
6.  $\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} - \frac{x}{t^2 + x^2} + \left(xe^x + \frac{t}{t^2 + x^2}\right)\dot{x} = 0$ .

112.– Resuelve el siguiente problema de valor inicial:

$$x^2 \cos t - 3t^2 x - 2t + (2x \text{sen } t - t^3 + \ln x)\dot{x} = 0, \quad x(0) = e.$$

### Factores integrantes

113.– Resuelve la ecuación diferencial

$$-tx \operatorname{sen} t + 2x \cos t + 2t \cos t \dot{x} = 0$$

con ayuda del factor integrante  $\mu(t, x) = tx$ .

114.– Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales utilizando un factor integrante adecuado.

1.  $2tx + (x^2 - 3t^2)\dot{x} = 0$
2.  $tx - t^2\dot{x} = 0$
3.  $tx^2 + t^2x^2 + 3 + t^2x\dot{x} = 0$
4.  $x + tx^2 + (t - t^2x)\dot{x} = 0$

115.– Supongamos que la ecuación diferencial  $e^t \sec x - \tan x + \dot{x} = 0$  tiene un factor integrante de la forma  $e^{-at} \cos x$  para algún  $a \in \mathbb{R}$ . Determina el valor de la constante  $a$  y resuelve la ecuación diferencial.

116.– Halla las condiciones que deben cumplir las funciones  $P$  y  $Q$  para que la ecuación diferencial  $P(t, x)\dot{x} + Q(t, x) = 0$  admita un factor integrante que sea función de  $t^2x$ .

### Homogéneas y otras

117.– Indica si las siguientes funciones son homogéneas y de que grado:

1.  $t^2 + 2tx - \frac{x^3}{t}$
2.  $\frac{t^3x - t^2x^2}{t + 8x}$
3.  $\cos \frac{t^2}{t+x}$
4.  $\ln t^2 - 2 \ln x$
5.  $(t^{-1} + x^{-1})^2$ .

118.– Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas:

1.  $t - x + t\dot{x} = 0$
2.  $t + (x - 2t)\dot{x} = 0$
3.  $x^2 + tx - t^2\dot{x} = 0$
4.  $-x + (t + \sqrt{tx})\dot{x} = 0$
5.  $x + t \cot \frac{x}{t} - t\dot{x} = 0$ .

119.– Resuelve los siguientes problemas de valor inicial:

1.  $tx^2\dot{x} = x^3 - t^3, \quad x(1) = 2$
2.  $x + t(\ln t - \ln x - 1)\dot{x} = 0, \quad x(1) = e$

$$3. t\dot{x} = x + \sqrt{t^2 + x^2}, \quad x(1) = 0.$$

**120.**— Dada la ecuación diferencial  $P(t, x)dx + Q(t, x)dt = 0$ , donde  $P$  y  $Q$  son funciones homogéneas del mismo grado, comprueba que  $\mu(t, x) = 1/(tQ(t, x) + xP(t, x))$  es un factor integrante de dicha ecuación, supuesto que  $xP(t, x) + tQ(t, x)$  no es cero. Estudia el caso en el que  $xP(t, x) + tQ(t, x)$  sea idénticamente cero. Aplica este resultado a la resolución de la ecuación  $(x^4 + t^4)dx - xt^3dt = 0$ .

**121.**— Halla la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales, reduciéndolas a separables mediante un cambio de variable.

1.  $\dot{x} = (t + x + 1)^2$
2.  $\dot{x} = \tan^2(t + x)$
3.  $\dot{x} = 2 + \sqrt{x - 2t + 3}$
4.  $t + 2x + 3 + (2t + 4x - 1)\dot{x} = 0$

**122.**— Halla la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales utilizando un método adecuado.

1.  $e^{\frac{t}{x}}(x - t)\dot{x} + x(1 + e^{\frac{t}{x}}) = 0$
2.  $(t^2x - t)\dot{x} + 2t^2 + x = 0$
3.  $e^x \sin t + \cos t(e^{2x} - x)\dot{x} = 0$
4.  $2t\dot{x} = 4t^2 - 3x$
5.  $(t + x) \sin x + (t \sin x + \cos x)\dot{x} = 0$
6.  $3x + e^t + (3t + \cos x)\dot{x} = 0$
7.  $(t - \sqrt{tx})\dot{x} = x$
8.  $\dot{x} = e^t e^x - 1$
9.  $(3t^2x - t)\dot{x} + 5tx^2 - 2x = 0$