13. Ecuaciones escalares autónomas

100.– Consideremos la ecuación diferencial autónoma $\dot{x} = f(x)$, donde f es una función polinómica de grado 2 no trivial. Demuestra que existe un cambio de variable de la forma $u = ax + b$ que la transforma en una de las siguientes formas

- $\dot{u} = u^2$
- $\dot{u} = ru(1-u)$
- $\dot{u} = r(1+u^2)$

101.– Halla la solución del problema de valor inicial $\dot{x} = x^2$, $x(0) = x_0$.

102.– Halla la solución del problema de valor inicial $\dot{x} = r(1+x^2)$, $x(0) = x_0$.

103.– La ecuación diferencial $\dot{x} = rx(1-x)$ se denomina *ecuación logística*, y modela el crecimiento de ciertas poblaciones. En ella r es una constante que determina el ritmo inicial de crecimiento/decrecimiento de la población. Para simplificar, consideremos solamente el caso $r > 0$.

- Halla los puntos de equilibrio y dibuja el diagrama de fases.
- Determina la procedencia y el destino de cada solución en términos de su condición inicial, así como la posible presencia de asíntotas.
- Representa gráficamente, de manera aproximada, las soluciones.
- Calcula exactamente dichas soluciones.

Aunque físicamente no tene sentido, estudiar también el caso $x < 0$.

104.– Para una ecuación diferencial autónoma $\dot{x} = f(x)$, estudia la concavidad/convexidad de las soluciones en términos del signo de $f(x)$ y su derivada $f'(x)$. Para ello, recuerda que una función $x(t)$ es cóncava si $\ddot{x}(t) < 0$ y convexa si $\ddot{x} > 0$. Aplica tus resultados a la ecuación logística $\dot{x} = rx(1-x)$ (ver el problema 103).

105.– Estudia la unicidad de la solución del problema de valor inicial $\dot{x} = |x|^s$, $x(0) = 0$ en términos del valor del parámetro $s > 0$. ¿En que casos se tiene solución única para el problema de valor inicial $\dot{x} = |x|^s$, $x(0) = x_0$, con $x_0 \neq 0$? Repite el problema para la ecuación $\dot{x} = -\operatorname{sign}(x)|x|^s$.

106.– El crecimiento de un tumor cancerígeno puede modelarse por la ley de Gompertz $\dot{x} = -ax\ln(bx)$, donde x es proporcional al número de células en el tumor, y a, b son constantes positivas. Dibuja el diagrama de fases y una gráfica aproximada de las soluciones para las distintas condiciones iniciales. Halla la solución exacta. ¿Sabrías interpretar, en términos biológicos, el significado de las constantes a y b?

107.– Otra ecuación diferencial que se ha empleado para determinar el crecimiento de un tumor cancerígeno es $\dot{x} = ax^{2/3} - bx$, donde x es proporcional al número de células en el tumor, y a, b son constantes positivas. Dibuja el diagrama de fases y una gráfica aproximada de las soluciones para las distintas condiciones iniciales. Aunque físicamente no tiene sentido, considerar también el caso $x < 0$.