10. Sistemas lineales: métodos de resolución

74.– Halla una matriz fundamental para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales lineales y, a partir de ella, halla la matriz resolvente.

1. $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & 1 \\ 0 & 1+\cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t-1 & -2 \\ 1 & t+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

75.– Calcula la matriz resolvente del sistema $\dot{X} = A(t)X$, donde $A(t)$ es la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \mathrm{e}^{-t} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Resuelve el problema de valor inicial $\dot{X} = A(t)X$, $X(0) = (1,1,1)$.

76.– Supongamos que $A(t)$ es una matriz real antisimétrica, $A(t)^{\mathsf{T}} = -A(t)$. Halla la condición que debe cumplir en $t = t_0$ una matriz fundamental del sistema $\dot{X} = A(t)X$ para que sea una matriz ortogonal.

77.– Sea $M(t)$ una matriz fundamental de un sistema diferencial lineal $\dot{X} = A(t)X$, y sea $\mathcal{R}(t,t_0)$ la matriz resolvente. Demuestra que existe una matriz regular P tal que $M(t) = \mathcal{R}(t,t_0)P$. Demuestra que si $M(t)$ y $N(t)$ son dos matrices fundamentales, existe una matriz regular Q tal que $M(t) = N(t)Q$.

78.– Resuelve el problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & 1 \\ 0 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

79.– Si $A(t)$ y $b(t)$ son las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \mathrm{e}^{-t} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \text{y} \qquad b(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{bmatrix},$$

resuelve el problema de valor inicial $\dot{X} = A(t)X + b(t)$, $X(1) = (1,0,1)$.

80.– Prueba que e^t y $t\mathrm{e}^t$ forman un sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial

$$t\ddot{y} - 2t\dot{y} + ty = 0.$$

Utiliza este hecho para resolver la ecuación no homogénea

$$t\ddot{y} - 2t\dot{y} + ty = \mathrm{e}^t$$

en el intervalo $(0, \infty)$.

81.– Sabiendo que $y(t) = \mathrm{e}^t$ es solución de la ecuación diferencial $(t-1)\ddot{y} - t\dot{y} + y = 0$, halla la solución general de

$$(t-1)\ddot{y} - t\dot{y} + y = 2\mathrm{e}^t.$$

82.– Halla la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \ddot{y} - 2t\dot{y} + (t^2 - 1)y = \mathrm{e}^{\frac{t^2-4t}{2}} \\ y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 1, \end{cases}$$

sabiendo que la ecuación homogénea admite una solución de la forma $y(t) = \mathrm{e}^{at^2}$, para algún $a \in \mathbb{R}$.

83.– Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales de Euler:

1. $t^2\ddot{y} - 4t\dot{y} + 4y = 0$
2. $t^2\ddot{y} + 2t\dot{y} + 4y = 0$
3. $t^2\ddot{y} + t\dot{y} + 4y = \operatorname{sen}(\ln t)$
4. $t^2\ddot{y} - 2t\dot{y} + 2y = 3t^2 + 2\ln t$

84.– Halla la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} t^2\ddot{y} - 3t\dot{y} + 3y = 2t^3 - t^2 \\ y(1) = -1, \ \dot{y}(1) = 1 \end{cases}$$

en el intervalo $(0, \infty)$

85.– Consideremos la ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{y} - \dot{y}\operatorname{ctg} t + y \operatorname{sen}^2 t = 0.$$

Utilizando las variable $x_1 = y$ y $x_2 = \dot{y}/\operatorname{sen} t$, plantéese como sistema de primer orden en dichas variables. Resuelve dicho sistema y da la solución de la ecuación diferencial anterior.