9. Sistemas lineales con coeficientes variables: teoría general

63.– Consideremos la ecuación diferencial $\dot{X} = A(t)X$. Halla la ecuación diferencial que se obtiene al cambiar la variable dependiente $X = P(t)\tilde{X}$, donde $P(t)$ es una matriz derivable e invertible. Halla la relación entre las matrices resolventes de ambos sistemas.

64.– Halla la solución del problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4t \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

65.– Halla la solución general del sistema lineal

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4t \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

y encuentra la matriz resolvente.

66.– Sean $\varphi\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funcion continua y A_0 una matriz real. Prueba que la matriz resolvente para el sistema $\dot{X} = \varphi(t)A_0\,X$ es

$$\mathcal{R}(t,\tau) = \exp\left[\left(\int_\tau^t \varphi(s)\,ds\right) A_0\right], \qquad t,\tau \in I.$$

Utiliza este resultado para resolver el sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t & t \\ -t & 2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

67.– Halla el sistema diferencial que deben satisfacer la función vectorial $\alpha(t) = [\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)]$ para que se satisfaga la siguiente propiedad: Para toda solución del sistema lineal $\dot{X} = A(t)X$ se tiene que el producto escalar $\alpha(t) \cdot X(t)$ es una función constante. Halla la matriz resolvente de tal sistema en términos de la matriz resolvente del sistema $\dot{X} = A(t)X$.

68.– Supongamos que $A(t)$ es una matriz real antisimétrica, $A(t)^\mathsf{T} = -A(t)$. Prueba que la matriz resolvente $\mathcal{R}(t,\tau)$ es una matriz ortogonal para todo $t,\tau \in I$. Discute qué propiedad tiene la matriz resolvente si $A(t)$ es compleja y antihermítica $\overline{A(t)}^\mathsf{T} = -A(t)$.

69.– Demuestra que si la matriz resolvente es de la forma $\mathcal{R}(t,\tau) = M(t-\tau)$, para alguna función matricial M, entonces la matriz de coeficientes del sistema es constante $A(t) = A_0$, para todo $t \in I$, y $M(s) = \mathrm{e}^{sA_0}$.

70.– Halla la solución del problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4t \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

71.– Sabiendo que $y_1(t) = t$ e $y_2(t) = \mathrm{e}^t$ son soluciones de la ecuación diferencial $\ddot{y} + P(t)\dot{y} + Q(t)y = 0$, halla la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \ddot{y} + P(t)\dot{y} + Q(t)y = (1-t)\mathrm{e}^t \\ y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1. \end{cases}$$

72.– Sabiendo que e^{-2t} y $t\mathrm{e}^t$ son soluciones de la ecuación diferencial

$$\ddot{y} + a(t)\dot{y} + b(t)y = 0,$$

resuelve el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \ddot{y} + a(t)\dot{y} + b(t)y = 1 + 3t \\ y(0) = 1, \ \dot{y}(0) = 0. \end{cases}$$

73.– Consideremos la ecuación de segundo orden $t^2\ddot{y} + \alpha t\dot{y} + \beta y = f(t)$. Transfórmala a sistema usando las variables $x_1 = y$, $x_2 = t\dot{y}$, y resuelve la ecuación homogénea utilizando el resultado del ejercicio 66. Este tipo de ecuaciones se llaman *ecuaciones de Euler*.