

7. TEORÍA CUALITATIVA

Estabilidad

49.— Analiza la estabilidad del sistema $\dot{X} = AX$ para cada una de las siguientes matrices A .

$$(1) \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(5) \begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 & -1 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \\ -4 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(6) \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$(7) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ -3 & -6 & -6 & 1 \\ 4 & 6 & 6 & 0 \\ -3 & -4 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(8) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

50.— Determina la estabilidad de las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $\ddot{y} + 7\ddot{y} + 17\dot{y} + 17y + 6y = 0$.
2. $\ddot{y} - \ddot{y} - 7\dot{y} + \dot{y} + 6y = 0$.
3. $\ddot{y} - \ddot{y} - 7\dot{y} = 0$.

51.— Prueba que si $\dot{X} = AX$ es asintóticamente estable, entonces toda solución tiende a cero exponencialmente. Más concretamente, probar que existen $\alpha > 0$, $C > 0$ y $t_1 > 0$ tales que

$$\|e^{tA}X_0\| \leq Ce^{-\alpha t}\|X_0\|,$$

para todo $X_0 \in \mathbb{R}^n$ y todo $t > t_1$.

52.— Utiliza el criterio de Routh-Hurwitz para determinar la estabilidad asintótica de las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $\ddot{y} + 7\ddot{y} + 17\dot{y} + 17y + 6y = 0$.

$$2. \ddot{y} + \gamma \dot{y} + (\omega^2 - \Omega^2)y = 0.$$

53.— Analiza la estabilidad de las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $\ddot{y} + \ddot{y} - 2\dot{y} + y = 0$
2. $y^{(4)} + 2\ddot{y} + 3\dot{y} + 4\dot{y} + y = 0$
3. $y^{(6)} - 5y^{(5)} + 2y^{(4)} - \ddot{y} + \dot{y} + 3y = 0$

Diagrama de fases

54.— Supongamos que A es una matriz real 2×2 con valores propios imaginarios, por lo que las órbitas son elipses. ¿Cómo podemos encontrar los ejes de dichas elipses?

55.— Dibuja con precisión el diagrama de fases de cada uno de los sistemas diferenciales lineales siguientes, calculando los elementos geométricos que lo determinan (ejes, semiejes, etc.).

$$(1) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad (2) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad (4) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$(5) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad (6) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

56.— Clasifica el diagrama de fases del sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+a & 2 \\ -2 & 1-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Para $a = \sqrt{8}$ dibuja con precisión el diagrama de fases.