

6. TRANSFORMADA DE LAPLACE

39.— A partir de la definición, encuentra la transformada de Laplace de las siguientes funciones:

$$1. f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

$$2. f(t) = \begin{cases} t, & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1, & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

$$3. f(t) = e^{t+7}$$

$$4. f(t) = te^{4t}$$

$$5. f(t) = t \cos t$$

$$6. f(t) = e^{-t} \operatorname{sen} t.$$

40.— Demuestra que la función $f(t) = e^{t^2}$ no tiene transformada de Laplace.

41.— Usa las propiedades de la transformada de Laplace para encontrar la transformada de las siguientes funciones

$$1. f(t) = 2t^4$$

$$2. f(t) = 4t - 10$$

$$3. f(t) = t^2 + 6t - 3$$

$$4. f(t) = (t + 1)^3$$

$$5. f(t) = 1 + e^{4t}$$

$$6. f(t) = (1 + e^{2t})^2$$

$$7. f(t) = 4t^2 - 5 \operatorname{sen} 3t$$

$$8. f(t) = e^t \operatorname{senh} t$$

$$9. f(t) = \operatorname{sen} 2t \cos 2t$$

$$10. f(t) = \cos t \cos 2t$$

$$11. f(t) = \operatorname{sen} t \cos 2t$$

$$12. f(t) = te^{10t}$$

$$13. f(t) = t^3 e^{-2t}$$

$$14. f(t) = e^t \operatorname{sen} 3t$$

$$15. f(t) = e^{5t} \operatorname{senh} 3t$$

$$16. f(t) = t(e^t + e^{2t})^2$$

$$17. f(t) = e^{-t} \operatorname{sen}^2 t$$

$$18. f(t) = (t - 1)H(t - 1)$$

$$19. f(t) = tH(t - 2)$$

$$20. f(t) = t \cos 2t$$

$$21. f(t) = t^2 \operatorname{senh} t$$

$$22. f(t) = te^{2t} \operatorname{sen} 6t$$

$$23. f(t) = \operatorname{sen}^2 t$$

24. $f(t) = \cos^2 t$
 25. $f(t) = \operatorname{senh}^2 t$
 26. $f(t) = \operatorname{cosh}^2 t$.

42.– Demuestra las reglas de transformación de la tabla de transformadas de Laplace.

43.– Halla las inversas de las transformadas que se dan a continuación:

1. $F(s) = \frac{1}{s^3}$
2. $F(s) = \frac{(s+1)^3}{s^4}$
3. $F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s-2}$
4. $F(s) = \frac{1}{4s+1}$
5. $F(s) = \frac{4s}{4s^2+1}$
6. $F(s) = \frac{1}{s^2-16}$
7. $F(s) = \frac{2s-6}{s^2+9}$
8. $F(s) = \frac{1}{s^2+3s}$
9. $F(s) = \frac{s}{s^2+2s-3}$
10. $F(s) = \frac{2s+4}{(s-2)(s^2+4s+3)}$
11. $F(s) = \frac{1}{s^2(s^2+4)}$
12. $F(s) = \frac{s}{(s^2-4)(s+2)}$
13. $F(s) = \frac{1}{(s+2)^3}$
14. $F(s) = \frac{1}{s^2-6s+10}$
15. $F(s) = \frac{s}{s^2+4s+5}$
16. $F(s) = \frac{s}{(s+1)^2}$
17. $F(s) = \frac{2s-1}{s^2(s+1)^3}$
18. $F(s) = \frac{e^{-2s}}{s^3}$

19. $F(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 1}$
20. $F(s) = \frac{e^{-s}}{s(s+1)}$
21. $F(s) = \frac{s}{(s^2 + 1)^2}$
22. $F(s) = \ln \frac{s-3}{s+1}$
23. $F(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{s}{2}$
24. $F(s) = \frac{3s^2 - 16s + 5}{(s+1)(s-3)(s-2)}$
25. $F(s) = \frac{3s^2 + 5s + 3}{s^3(s+1)}$.

44.— Escribe cada función en términos de funciones escalón unitarias y hallar su transformada de Laplace

1. $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ t^2 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$
2. $f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ 0 & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$
3. $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } a < t < b \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$

45.— Calcula la transformada de Laplace de las funciones:

1. $f(t) = \int_0^t e^{-\tau} \cos \tau d\tau$
2. $f(t) = \int_0^t \tau e^{t-\tau} d\tau$
3. $f(t) = t \int_0^t \text{sen } \tau d\tau$
4. $f(t) = (1) * (t^3)$
5. $f(t) = (t^2) * (t^4)$
6. $f(t) = (e^{-t}) * (e^t \cos t)$.

46.— Utiliza la transformada de Laplace para resolver los siguientes problemas de valor inicial:

1. $\dot{y} + 4y = e^{4t}, \quad y(0) = 2$
2. $\ddot{y} - 4\dot{y} + 4y = t^3 e^{2t}, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0$
3. $\ddot{y} + y = \text{sen } t, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = -1$
4. $\ddot{y} - \dot{y} = e^t \cos t, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0$
5. $2\ddot{y} + 3\dot{y} - 3y - 2y = e^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad \ddot{y}(0) = 1$

6. $\ddot{y} + 4y = H(t - 2\pi) \text{sen } t, \quad y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0$

7. $\dot{y} + y = f(t) \quad y(0) = 0$, donde

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 5 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

8. $\ddot{y} + y = f(t), \quad y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1$ donde

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < \pi \\ 1 & \text{si } \pi \leq t < 2\pi \\ 0 & \text{si } t \geq 2\pi. \end{cases}$$

47.— Utilizando la transformada de Laplace, halla la solución de los problemas del Capítulo 5.

48.— Resuelve los problemas de valor inicial del Capítulo 4 utilizando el método de la transformada de Laplace.