5. Ecuaciones de orden superior

28.– Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $\ddot{y} - y = 0$
2. $\ddot{y} - 2\dot{y} + y = 0$
3. $\ddot{y} - 2\dot{y} + 5y = 0$
4. $y^{IV} - 5\dddot{y} + 6\ddot{y} + 4\dot{y} - 8y = 0$
5. $y^{IV} + \dddot{y} + \ddot{y} = 0$
6. $y^{V} - 16\dot{y} = 0$
7. $y^{V} + 5y^{IV} - 2\dddot{y} - 10\ddot{y} + \dot{y} + 5y = 0$
8. $y^{IV} + y = 0$

29.– Halla la solución de cada uno de los siguientes problemas de valor inicial:

1. $\ddot{y} + 3y = 0$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 1$.
2. $\ddot{y} - y = 0$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 0$.
3. $\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 0$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$.
4. $\ddot{y} - 2\dot{y} + 5y = 0$, $y(0) = -1$, $\dot{y}(0) = 1$.
5. $\ddot{y} + \dot{y} - 6y = 0$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 2$.

30.– Halla la solución de cada uno de los siguientes problemas de valor inicial:

1. $\ddot{y} + 3y = t^3 - 1$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 1$.
2. $\ddot{y} - y = t^2 e^t$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 0$.
3. $\ddot{y} + 2\dot{y} + y = e^{-t}$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$.
4. $\ddot{y} + 4y = t \operatorname{sen} 2t$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = -1$.
5. $\ddot{y} - 2\dot{y} + 5y = 2\cos^2 t$, $y(0) = -1$, $\dot{y}(0) = 1$.
6. $\ddot{y} + \dot{y} - 6y = \operatorname{sen} t + te^{2t}$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 2$.
7. $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = e^t + e^{2t}$, $y(0) = 2$, $\dot{y}(0) = 1$.

31.– Resuelve los siguientes problemas de valor inicial:

1. $y^{IV} - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 0, \quad \dddot{y}(0) = -1$
2. $y^{IV} + 4\dddot{y} + 14\ddot{y} - 20\dot{y} + 25y = 0, \quad y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = \dddot{y}(0) = 0$
3. $y^{IV} - 3\dddot{y} + 3\ddot{y} - \dot{y} = 0, \quad y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = \dddot{y}(0) = 1$
4. $\dddot{y} + \ddot{y} + \dot{y} + y = t + e^{-t}, \quad y(0) = 1, \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 0.$

32.– Halla la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \ddot{y} + 4y = f(t) \\ y(0) = 1 \\ \dot{y}(0) = 0, \end{cases}$$

siendo f la función $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{si } 2 < t. \end{cases}$

33.– Utilizando el método de los coeficientes indeterminados, halla una solución particular de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $\ddot{y} - y = t\mathrm{e}^t + \cos t$
2. $\dddot{y} - \dot{y} = \operatorname{sen}(t)\cos(t)$.
3. $y^{(4)} - 4y^{(3)} + 5\ddot{y} = t - 1 + \mathrm{e}^{2t}$.

34.– Utilizando el método de los coeficientes indeterminados, halla la solución de los siguientes problemas de valor inicial:

1. $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = e^t + e^{2t}$, $y(0) = 2$, $\dot{y}(0) = 1$.
2. $\dddot{y} + \ddot{y} + \dot{y} + y = t + e^{-t}, \quad y(0) = 1, \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 0.$

35.– Resuelve los siguientes problemas de valor inicial:

1. $\begin{cases} \ddot{x} + y = 1 \\ x + \ddot{y} = -1 \end{cases} \qquad \begin{array}{ll} x(0) = 1, & \dot{x}(0) = 1, \\ y(0) = 1, & \dot{y}(0) = -1. \end{array}$

2. $\begin{cases} 2\dot{x} - \dot{y} + y = 0 \\ \ddot{x} - \dot{y} + x - 2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{ll} x(0) = 1, & \dot{x}(0) = 1, \\ y(0) = 1. & \end{array}$

36.– Sean α, β números reales positivos. Demuestra que toda solución de la ecuación diferencial

$$\ddot{y} + \alpha\dot{y} + \beta y = 0$$

tiende a cero cuando t tiende a ∞. Prueba que si α o β son negativos, entonces existe al menos una solución no acotada en $\mathbb{R}^+$.

37.– Sea γ la función de Green para el problema de Cauchy de la ecuación diferencial

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0 y = 0.$$

Prueba que la familia de funciones $y_1 = \gamma, y_2 = \dot{\gamma}, \ldots, y_n = \gamma^{(n-1)}$ es un sistema fundamental de soluciones de dicha ecuación (i.e. son soluciones y cualquier otra solución se puede poner de forma única como combinación lineal de ellas).

38.– Consideramos una matriz $A \in \mathbb{K}^{(n,n)}$ y sea

$$p(s) = s^m + \alpha_{m-1}s^{m-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

un polinomio que anula a la matriz A (por ejemplo, su polinomio característico, en cuyo caso $m = n$, o su polinomio mínimo). Consideremos las funciones $y_1(t), \ldots, y_m(t)$ definidas como sigue: la función $y_i(t)$ es la solución de la ecuación diferencial

$$y^{(m)} + \alpha_{m-1} y^{(m-1)} + \cdots + \alpha_1 \dot{y} + \alpha_0 y = 0,$$

con condiciones iniciales $(y(0), \dot{y}(0), \ldots, y^{(m-1)}(0))$ iguales al i-ésimo vector de la base canónica, $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. Entonces, se puede probar que

$$\mathrm{e}^{tA} = y_1(t) I_n + y_2(t) A + \cdots + y_m(t) A^{m-1}.$$

Utiliza este resultado para hallar la exponencial de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nota: no se pide demostrar el resultado citado, sino solamente que lo utilices.