4. Sistemas lineales con coeficientes constantes

19.– Utilizando la exponencial matricial, hallar la solución del problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

20.– Utilizando la exponencial matricial, hallar la solución del problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x(2) \\ y(2) \\ z(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

21.– Hallar la solución de los siguientes problemas de valor inicial

$$(1) \begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = y - x \\ x(0) = 1 \\ y(0) = -1 \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = -y \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \dot{x} = 3x - y - z \\ \dot{y} = x + y - z \\ \dot{z} = x - y + z \\ x(0) = 3 \\ y(0) = 2 \\ z(0) = 2 \end{cases} \qquad (4) \begin{cases} \dot{x} = 3x - y - z \\ \dot{y} = x + y - z \\ \dot{z} = x - y - z \\ x(0) = 4 \\ y(0) = 1 \\ z(0) = 4. \end{cases}$$

22.– Hallar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x} = -2y + \operatorname{sen}(t) \\ \dot{y} = 2x + 1 \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0) = -1$, $y(0) = 1$.

23.– Hallar la solución del problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

24.– Hallar la solución del problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{t} \\ 0 \\ \mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x(2) \\ y(2) \\ z(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

25.– Sea A una matriz triangular superior por bloques

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}.$$

Probar que la exponencial de A es también triangular por bloques

$$\mathrm{e}^{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{A_1} & C \\ 0 & \mathrm{e}^{A_2} \end{bmatrix},$$

hallando el valor de C.

26.– Consideremos el sistema lineal $\dot{X} = AX + b(t)$, donde $b(t)$ es una función periódica de periodo $T > 0$.

1. Probar que si $X(t)$ es una solución del sistema, entonces $X(t+T)$ también lo es.
2. Probar que $X(t)$ es una solución periódica de periodo T si y sólo si existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $X(t_0) = X(t_0 + T)$.
3. Probar que el sistema homogéneo admite soluciones T-periódicas no triviales si y sólo si e^{TA} tiene un valor propio 1. ¿Cuales son las soluciones periódicas? ¿Cómo son los valores propios de A?
4. Probar que si la única solución T-periódica del sistema homogéneo es la solución trivial entonces el sistema no homogéneo tiene una única solución T-periódica cuyo valor inicial viene dado por

$$X_0 = (\mathrm{e}^{-TA} - I_n)^{-1} \int_0^T e^{-\tau A} b(\tau)\, d\tau.$$

27.– Sea A una matriz real simétrica y sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base ortonormal formada por vectores propios de A correspondientes a los valores propios $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$. Probar que la solución del problema de valor inicial $\dot{X} = AX,\ X(0) = X_0$ se puede escribir en la forma

$$X(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\langle v_1, X_0 \rangle v_1 + \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\langle v_2, X_0 \rangle v_2 + \cdots + \mathrm{e}^{\lambda_n t}\langle v_n, X_0 \rangle v_n.$$