2. Sistemas lineales: introducción

6.– Sea $M(t)$ una función matricial derivable en un intervalo I y con $\det M(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Demuestra que su inversa $M(t)^{-1}$ es derivable y su derivada es

$$\frac{d}{dt}\left[M(t)^{-1}\right] = -M(t)^{-1}\dot{M}(t)M(t)^{-1}.$$

7.– Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{X} = AX + b(t)$. Al realizar el cambio de variable $\tilde{X} = PX$ el sistema se transforma en $\dot{\tilde{X}} = \tilde{A}\tilde{X} + \tilde{b}(t)$. Halla la relación entre las matrices A y $\tilde{A}$, y entre los vectores $b(t)$ y $\tilde{b}(t)$. ¿Cuál es la relación entre los valores propios de A y los de $\tilde{A}$?

Discute qué ocurre si se hace un cambio de variable $\tilde{X} = P(t)X$, donde $P(t)$ es una matriz regular, que es derivable con respecto a la variable t.

8.– Sea A una matriz real cuadrada de dimensión n. Sean λ un valor propio complejo de A, $v \in V_A(\lambda)$ un vector propio, y $V(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}v$ la correspondiente solución propia del sistema homogéneo $\dot{X} = AX$. Demuestra que tanto la parte real como la parte imaginaria de $V(t)$ son ambas soluciones reales del sistema $\dot{X} = AX$. ¿Ocurre los mismo para las soluciones propias generalizadas? ¿Y para una solución cualquiera?

9.– Para cada uno de los siguientes sistemas homogéneos de ecuaciones diferenciales lineales

$$(1)\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = 4x + 3y \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = y - x \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + z \\ \dot{z} = -y \end{cases} \qquad (4)\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z \\ \dot{y} = 2y + z \\ \dot{z} = 2z \end{cases}$$

$$(5)\begin{cases} \dot{x} - 2x = 0 \\ \dot{y} + z - 2y = 0 \\ \dot{z} - x = y, \end{cases}$$

escríbelo en forma matricial y halla sus soluciones propias generalizadas. Si son complejas, halla las correspondientes soluciones reales

10.– Hallar el sistema de ecuaciones diferenciales lineales que satisfacen la parte real x e imaginaria y de la función compleja de variable real $z = x+iy$, si z satisface la ecuación diferencial lineal compleja $\dot{z} = (\alpha+i\omega)z$.

A partir de la solución de la ecuación compleja deduce la solución del sistema obtenido.

11.– Hallar el sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden que satisfacen las variables $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, si la función y satisface la ecuación diferencial lineal de segundo orden $\ddot{y} + \alpha\dot{y} + \beta y = f(t)$. Halla el polinomio característico de la matriz de coeficientes del sistema obtenido.