1. Ecuaciones lineales

1.– Encontrar la solución de los siguientes problemas de valor inicial

1. $\dot{x} = 5x, \quad x(0) = 2.$
2. $\dot{x} + x = 0, \quad x(2) = 1.$
3. $\dot{x} + x = t\mathrm{e}^{-t}, \quad x(0) = 3.$
4. $\dot{x} = -2x + b(t), \quad x(0) = 4$; siendo $b(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 3 \\ -1 & \text{si } t > 3. \end{cases}$
5. $\dot{x} + x = b(t), \quad x(0) = 1$; siendo $b(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{si } t > 1. \end{cases}$

2.– Encontrar la solución de los siguientes problemas de valor inicial.

1. $\dot{z} + 2iz = 0, \quad z(0) = 1 + i.$
2. $\dot{z} + (1 - i)z = t, \quad z(0) = i.$

3.– Sea a un número real negativo. Demostrar que toda solución de la ecuación diferencial

$$\dot{x} = ax,$$

tiende a cero cuando t tiende a ∞. Enunciar y demostrar un resultado análogo para ecuaciones con coeficientes complejos.

4.– Sea $b\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua y acotada, y sea a un número real. Demostrar que el crecimiento de cualquier solución de la ecuación diferencial

$$\dot{x} = ax + b(t),$$

es, a lo sumo, exponencial.

Nota: se dice que una función f tiene crecimiento a lo sumo exponencial si existen $t_0 > 0$, $K > 0$ y γ tales que $|f(t)| \leq K\mathrm{e}^{\gamma t}$ para $t \geq t_0$.

5.– Sea a un número real negativo y sea $b\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función tal que existe el límite

$$\lim_{t \to +\infty} b(t) = \beta > 0.$$

Demostrar que toda solución de la ecuación diferencial

$$\dot{x} = ax + b(t),$$

tiene límite cuando t tiende a ∞ y dicho límite es $-\beta/a$.