18/11/2021

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1.– Sean $A \in \mathbb{K}^{(n,n)}$ y $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{K}^{(n,n)}$. Demuestra que $\varphi(t) = \mathrm{e}^{tA}$ si y solo si

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt}(t) = A\varphi(t), & \forall t \in \mathbb{R} \\ \varphi(0) = I_n \end{cases}$$

2.– Sea $X(t) = U(t) + iV(t)$ una solución compleja del sistema diferencial real $\dot{X} = AX + b(t)$, con $b \neq 0$. Una, y solo una, de las siguientes cuatro afirmaciones es cierta. Indica cuál es y demuéstrala.

a. U y V son ambas solución de la ecuación no homogénea.

b. U y V son ambas solución de la ecuación homogénea.

c. U es solución de la ecuación homogénea y V es solución de la ecuación no homogénea.

d. U es solución de la ecuación no homogénea y V es solución de la ecuación homogénea.

OTROS, para otra ocasión

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1.– Enuncia y demuestra el teorema que establece cuál es la forma de la solución general de una ecuación diferencial escalar homogénea de orden n (tanto el caso complejo como el caso real). Indica claramente de qué resultados partes.

2.– Sea $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ una matriz cuyos elementos son no negativos, es decir, $A_{ij} \geq 0$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$. Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Si son verdaderas demuéstralas, y si son falsas da un contraejemplo.

a. Los elementos de la matriz e^A son, también, no negativos.

b. Si $X_0 \in \mathbb{R}^n$ un vector cuyas componentes son no negativas, entonces cada una de las componentes de la solución del problema de valor inicial $\dot{X} = AX$, $X(t_0) = X_0$, es una función no decreciente en el intervalo $[t_0, +\infty)$.

3.– Sea $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ una matriz simétrica. Demuestra que e^A es una matriz simétrica definida positiva. Ayuda: $A = A/2 + A/2$.

4.– Indica si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Si es verdadera demuéstrala, y si es falsa da un contraejemplo. Si $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ es una matriz tal que e^A tiene un valor propio 1, entonces A tiene núcleo.

5.– Sea $X(t)$ la solución del PVI $\dot{X} = AX + b(t)$, $X(t_0) = X_0$. Sea $Y(t)$ la solución del PVI $\dot{X} = AX$, $X(t_0) = Y_0$. En términos de ellas, ¿cuál es la solución del PVI $\dot{X} = AX + b(t)$, $X(t_0) = X_0 + Y_0$?

Demasiado fácil, trivial

6.– Sea λ un valor propio de A y sea $0 \neq v \in E_A(\lambda)$ un vector propio generalizado. Prueba que la transformada de Laplace de la solución del problema de valor inicial $\dot{X} = AX$, $X(0) = v$ es una función de la forma $\frac{1}{(s-\lambda)^\nu} P(s)$, donde $P(s)$ es un polinomio vectorial tal que $P(\lambda) = v$, y donde ν es un entero positivo que debes hallar.

15/04/2021

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1.– (Ecuaciones diferenciales escalares autónomas) Enuncia y demuestra el teorema que caracteriza la prolongabilidad/maximalidad de una solución de un problema de valor inicial en términos de la convergencia/divergencia de integrales impropias.

2.– Supongamos que $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas y que $a(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Consideremos una ecuación diferencial de variables separadas $\dot{x} = a(t)b(x)$. Razona la veracidad de las siguientes afirmaciones:

a) Si $b(x_0) \neq 0$ entonces el problema de valor inicial $\dot{x} = a(t)b(x)$, $x(t_0) = x_0$ tiene una única solución.

b) Si $b(x_0) = 0$ entonces el problema de valor inicial $\dot{x} = a(t)b(x)$, $x(t_0) = x_0$ no tiene solución.

Si son verdaderas demuéstralas y si son falsas da un contraejemplo.

Primer parcial 28/01/2021

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1.– Define, con precisión, qué se entiende por matriz resolvente de un sistema diferencial lineal. Enuncia y demuestra sus principales propiedades.

2.– Sea $A(t)$ una función matricial, continua en toda la recta real, y cuya traza es constante y no nula. Probar que existe una solución del sistema $\dot{X} = A(t)X$ que no está acotada.

3.– Consideremos la matriz real A y la función vectorial $b(t)$ dados por

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad b(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^t \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

i) Halla e^{tA}.
ii) Utilizando la transformada de Laplace resuelve el problema de valor inicial $\dot{X} = AX + b(t)$, $X(0) = [0, 0, 1]$.
iii) Hallar la solución de $\dot{X} = AX + b(t)$, $X(0) = [1, 0, 1]$.

4.– Clasifica el diagrama de fases del sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+a & 2 \\ -2 & 1-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Para $a = \sqrt{8}$ dibuja con precisión el diagrama de fases.

5.– Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t-1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Hallar la matriz resolvente del sistema homogéneo. Hallar la solución del sistema con condición inicial $X(0) = [0, 1]$.

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1.– Enuncia, con precisión, y demuestra el teorema que asegura que una solución maximal sale de cualquier compacto.

2.– Sea $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Supongamos que existen tres funciones reales continuas $\mu(t), \nu(t), \theta(t)$ con dominio $\mathbb{R}$, y con μ, ν no negativas, tales que

$$|g(t,y,v)| \leq \mu(t)|y| + \nu(t)|v| + \theta(t), \qquad \forall (t,y,v) \in \mathbb{R}^3.$$

Demuestra que el dominio de la solución general maximal de la ecuación diferencial de segundo orden $\ddot{y} = g(t,y,\dot{y})$ es $\mathbb{R}^4$.

3.– Halla las derivadas parciales de la solución general $x = \psi(t, t_0, y_0, \dot{y}_0, \mu)$ de la ecuación diferencial de segundo orden

$$t^2\ddot{y} - 2t\dot{y} + 2y = \mu\big(t + (y-t)^2\big)$$

con respecto a los datos iniciales y al parámetro μ en el punto $(t, t_0 = 1, y_0 = 1, \dot{y}_0 = 1, \mu = 0)$.

4.– Determina los valores del parámetro $\mu > 0$ para los cuales la ecuación diferencial

$$\dot{x} = (x^2 - 6x + 5)\operatorname{senh}(|x|^\mu)$$

tiene solución única (para cada valor inicial). Determina los valores de μ y de la condición inicial $x(0)$ para los cuales la solución es global. Para $\mu = 1$ haz un esbozo de la gráfica de las soluciones.

5.– Halla la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{tx}{1 - t^2 - x^2} \\ \dot{y} = \dfrac{x^2 + 2t^2}{y} \\ x(1/2) = \sqrt{3/2} \\ y(1/2) = -1 \end{cases}$$

indicando su dominio, y razonando que la solución que has obtenido es maximal.

Examen global, primera convocatoria 25/06/2021

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1.– Enuncia y demuestra el teorema de existencia y unicidad local para ecuaciones diferenciales escalares no autónomas (exactas).

2.– Consideremos una ecuación diferencial escalar de orden n homogénea y con coeficientes constantes. Sea $G(s)$ la transformada de Laplace de la función de Green (para el problema de Cauchy). Razona la veracidad de cada una de las siguientes afirmaciones:

1. Toda solución de la ecuación diferencial está acotada para $t \geq 0$ si y solo si todos los polos de $G(s)$ tienen parte real menor o igual que cero.
2. Toda solución de la ecuación diferencial tiende a cero cuando $t \to +\infty$ si y solo si todos los polos de $G(s)$ tienen parte real negativa.

Si son ciertas demuéstralas; si son falsas da un contraejemplo. Recuerda que los polos de una función racional son los ceros del denominador de dicha función.

3.– Sea $f(t, x)$ una función real con dominio $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ para la que existe $m \in \mathbb{R}$ tal que se satisface

$$f(\lambda t, \lambda^m x) = \lambda^{m-1} f(t, x), \qquad \forall \lambda > 0, \forall (t, x) \in \mathcal{D}.$$

Comprueba que el cambio de variable $y = x/t^m$ transforma la ecuación diferencial $\dot{x} = f(t, x)$ en una ecuación de variables separadas.

Utiliza el resultado anterior para hallar la solución implícita de la ecuación diferencial

$$\dot{x} = -\frac{1}{2tx}\Big(x^2 + \frac{2}{t}\Big).$$

Halla la solución maximal de esta ecuación con condición inicial $x(1) = 1$, justificando su maximalidad.

4.– Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x} = (\mu - 1)x + yz \\ \dot{y} = (y^2 - 3y)\mathrm{e}^{-y^2} \\ \dot{z} = -\mu z + y^2, \end{cases}$$

donde μ es un parámetro real. Demuestra que el dominio de sus soluciones es la recta real. Para $\mu \neq 0, 1$, analiza la estabilidad de sus puntos de equilibrio. Halla las derivadas parciales de la solución general $(x, y, z) = \psi(t, t_0, x_0, y_0, z_0, \mu)$ con respecto a los datos iniciales y al parámetro en el punto $(t, t_0 = 0, x_0 = 1, y_0 = 0, z_0 = 1, \mu = 0)$

5.– Halla la matriz resolvente del sistema de ecuaciones diferenciales lineales $\dot{X} = A(t)X$, donde

$$A(t) = \begin{bmatrix} 2t & 0 & 1 \\ 0 & 2t & 1 \\ 0 & -1 & 2t \end{bmatrix}$$

Utilízala para resolver el problema de valor inicial para el sistema no homogéneo $\dot{X} = A(t)X + b(t)$, $X(0) = [0, 0, 1]$, siendo $b(t) = [t, 0, 0]$.

Examen global, segunda convocatoria 07/09/2021

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1.– Enuncia con propiedad y demuestra **uno** de los siguientes teoremas:

a) Existencia y unicidad local de soluciones de ecuaciones diferenciales escalares autónomas.

b) El grafo de la solución maximal de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias sale de cualquier compacto contenido en su dominio.

2.– Sea $f\colon \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua en el abierto $\mathcal{D}$. Demostrar que una solución $\gamma\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(t, x)$ es prolongable por la derecha si y solo si existe el límite $b = \lim_{t\to\beta^-} \gamma(t)$ y $(\beta, b) \in \mathcal{D}$.

3.– Halla la matriz resolvente del sistema de ecuaciones diferenciales lineales $\dot{X} = A(t)X$, donde

$$A(t) = \begin{bmatrix} 2t & 0 & 1 \\ 0 & 2t & 1 \\ 0 & -1 & 2t \end{bmatrix}$$

Utilízala para resolver el problema de valor inicial para el sistema no homogéneo $\dot{X} = A(t)X + b(t)$, $X(0) = [0, 0, 1]$, siendo $b(t) = [t, 0, 0]$.

4.– Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu(x^4 + 1) \\ \dot{y} = x(1 + \mu e^y) \end{cases}$$

donde μ es un parámetro.

1. Halla las derivadas parciales primeras de la solución general con respecto a todas sus variables (incluido el parámetro μ) en el punto $(t, t_0 = 0, x_0 = 1, y_0 = 0, \mu = 0)$. Indica claramente cómo has obtenido las matrices del sistema.
2. Probar que para todo $T > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|\mu| < \delta$ entonces el dominio $J_{0,(1,0),\mu}$ de la solución maximal de dicha ecuación que comienza en $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ contiene al intervalo $[-T, T]$, pero $J_{0,(1,0),\mu} \neq \mathbb{R}$ si $\mu \neq 0$.

Los ejercicios 1 y 2 tienen un valor de 2 puntos. Los ejercicios 3 y 4 tienen un valor de 3 puntos.

Examen global, segunda convocatoria 13/09/2021

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1.– Enuncia con propiedad y demuestra **uno** de los siguientes resultados:

a) Existencia y unicidad local de soluciones de ecuaciones diferenciales escalares autónomas.

b) Las derivadas parciales de la solución general de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias satisfacen la ecuación variacional.

2.– Sea $f\colon \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua y que satisface la condición local de Lipschitz en el abierto $\mathcal{D}$. Demostrar que una solución $\gamma\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(t, x)$ es prolongable por la derecha si y solo si existe el límite $b = \lim_{t\to\beta^-} \gamma(t)$ y $(\beta, b) \in \mathcal{D}$.

3.– Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + \mu \operatorname{sen} x \\ \dot{y} = -2x - \mu \operatorname{sen} y + y, \end{cases}$$

donde μ es un parámetro real. El punto $p = (0, 0)$ es un punto de equilibrio. Estudia la estabilidad de p en función de los valores del parámetro $\mu \in \mathbb{R}$.

La linealización en el punto de equilibrio es un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Clasifica el diagrama de fases de este sistema según los valores de μ. Para $\mu = \sqrt{8}$ dibuja con precisión el diagrama de fases.

4.– Halla la matriz resolvente del sistema de ecuaciones diferenciales lineales $\dot{X} = A(t)X$, donde

$$A(t) = \begin{bmatrix} 2t & 0 & 1 \\ 0 & 2t & 1 \\ 0 & -1 & 2t \end{bmatrix}$$

Utilízala para resolver el problema de valor inicial para el sistema no homogéneo $\dot{X} = A(t)X + b(t)$, $X(0) = [0, 0, 1]$, siendo $b(t) = [t, 0, 0]$.

Los ejercicios 1 y 2 tienen un valor de 2 puntos. Los ejercicios 3 y 4 tienen un valor de 3 puntos.