Segundo parcial 01/06/2021

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1.– Enuncia, con precisión, y demuestra el teorema que asegura que una solución maximal sale de cualquier compacto.

2.– Sea $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Supongamos que existen tres funciones reales continuas $\mu(t), \nu(t), \theta(t)$ con dominio $\mathbb{R}$, y con μ, ν no negativas, tales que

$$|g(t,y,v)| \leq \mu(t)|y| + \nu(t)|v| + \theta(t), \qquad \forall (t,y,v) \in \mathbb{R}^3.$$

Demuestra que el dominio de la solución general maximal de la ecuación diferencial de segundo orden $\ddot{y} = g(t,y,\dot{y})$ es $\mathbb{R}^4$.

3.– Halla las derivadas parciales de la solución general $x = \psi(t, t_0, y_0, \dot{y}_0, \mu)$ de la ecuación diferencial de segundo orden

$$t^2\ddot{y} - 2t\dot{y} + 2y = \mu\big(t + (y-t)^2\big)$$

con respecto a los datos iniciales y al parámetro μ en el punto $(t, t_0 = 1, y_0 = 1, \dot{y}_0 = 1, \mu = 0)$.

4.– Determina los valores del parámetro $\mu > 0$ para los cuales la ecuación diferencial

$$\dot{x} = (x^2 - 6x + 5)\operatorname{senh}(x^\mu)$$

tiene solución única (para cada valor inicial). Determina los valores de μ y de la condición inicial $x(0)$ para los cuales la solución es global. Para $\mu = 1$ haz un esbozo de la gráfica de las soluciones.

5.– Halla la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{tx}{1 - t^2 - x^2} \\ \dot{y} = \dfrac{x^2 + 2t^2}{y} \\ x(1/2) = \sqrt{3/2} \\ y(1/2) = -1 \end{cases}$$

indicando su dominio, y razonando que la solución que has obtenido es maximal.