SEGUNDO PARCIAL 13/05/2024

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1.– Define qué entendemos por una ecuación diferencial exacta. Enuncia y demuestra el teorema de existencia y unicidad local para dichas ecuaciones.

2.– Sea $\psi(t, t_0, x_0)$ la solución general de un sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{x} = f(t, x)$. Demuestra que la solución general del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ \dot{X} = D_x f(t, x) X \end{cases}$$

es

$$\Psi(t, t_0, x_0, X_0) = \big(\psi(t, t_0, x_0), D_{x_0}\psi(t, t_0, x_0)X_0\big).$$

Se supone que tanto f como las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x)$, para $i, j = 1, \ldots, n$, son funciones continuas. El subíndice en D_x o D_{x_0} indica la diferencial parcial con respecto a la variable x o x_0, respectivamente.

3.– Halla la solución general maximal de la ecuación diferencial

$$\dot{x} = 1 - x^2.$$

¿Para qué valores de $x_0 \in \mathbb{R}$ tiene sentido el límite $\lim_{t\to\infty} \gamma_{0,x_0}(t)$? ¿Y el límite $\lim_{t\to-\infty} \gamma_{0,x_0}(t)$? ¿Cuánto valen dichos límites?

4.– Halla la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{tx}{1 - t^2 - x^2}, & x(1/2) = \sqrt{3/2} \\ \dot{y} = \dfrac{x^2 + 2t^2}{y}, & y(1/2) = -1, \end{cases}$$

indicando su dominio, y razonando que la solución que has obtenido es maximal.

5.– Prueba que todo problema de valor inicial para el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x} = \mathrm{e}^{t^2} x + yz \\ \dot{y} = (y^5 + y - 3)\mathrm{e}^{-y^2} \\ \dot{z} = (1 - |t|)z + y^2, \end{cases}$$

tiene solución única global.

Cada pregunta vale 2 puntos.

El examen tiene una duración de 2 horas y media