Segundo parcial 07/06/2023

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1.– Halla el sistema de ecuaciones diferenciales que satisface la derivada parcial de la solución general $\psi(t, t_0, x_0)$ de un sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{x} = f(t, x)$ con respecto a las variables x_0. Enuncia las hipótesis de las que partes, define cada objeto que utilices y razona todos los pasos.

2.– Sea $\mathcal{U}$ un abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1. Consideremos el sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias $\dot{x} = f(x)$. Sea $x = \gamma_{0,x_0}(t)$ la solución maximal con condición inicial $x(0) = x_0 \in \mathcal{U}$. Razona la veracidad de la siguiente afirmación:

> Si existe un compacto $\mathcal{K} \subset \mathcal{U}$ tal que $\gamma_{0,x_0}(t) \in \mathcal{K}$ para todo $t > 0$, $t \in J_{0,x_0}$ entonces $\tau^+_{0,x_0} = +\infty$.

Si es cierta demuéstrala, y si es falsa da un contraejemplo.

3.– Halla la solución general (implícita) de la ecuación diferencial

$$\dot{x} = \frac{ax}{2(x^2 - at)},$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es un parámetro. Para $a = -1$ halla la solución maximal de dicha ecuación que satisface $x(0) = 1$. Para $a = 0$, halla la derivada parcial de la solución general maximal $\psi(t, t_0, x_0, a)$ de dicha ecuación en el punto $(t, t_0, x_0, a) = (t, 0, 1, 0)$.

4.– Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x} = x \operatorname{sen}(xy) - y + \mu t \cos(ty) \\ \dot{y} = x \cos(2xy) + \alpha y - \mu t^3 \mathrm{e}^{-x^2}, \end{cases}$$

donde α y μ son parámetros reales.

a) Demuestra que el dominio de cualquiera de sus soluciones es la recta real.

b) Para $\mu = 0$ (el sistema diferencial es autónomo) el origen es un punto de equilibrio. Estudia su estabilidad (en función de los valores del parámetro α).

Las preguntas 1 y 2 valen 2 puntos. Las preguntas 3 y 4 valen 3 puntos.

El examen tiene una duración de 2 horas