Primer parcial 03/02/2022

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1.– Consideremos un sistema homogéneo de n ecuaciones diferenciales lineales $\dot{X} = A(t)X$, donde los elementos de la matriz $A(t)$ son funciones continuas en un intervalo I. A partir del teorema de existencia y unicidad de solución de problemas de valor inicial, prueba que el conjunto de soluciones es un espacio vectorial de dimensión n.

2.– Sea $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{(n,n)}$ una función matricial. Supongamos que existen un vector no nulo $v \in \mathbb{C}^n$ y una función continua $\omega\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ satisfaciendo $A(t)v = \omega(t)v$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Prueba que existe una función derivable $\Omega\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tal que $X(t) = \Omega(t)v$ es una solución del sistema $\dot{X} = A(t)X$. Suponiendo que existen n vectores $v_1, \ldots, v_n$ linealmente independientes satisfaciendo $A(t)v_i = \omega_i(t)v_i$, para algunas funciones $\omega_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, encuentra una matriz fundamental para el citado sistema (y prueba que, en efecto, es una matriz fundamental).

3.– Consideremos la matriz real A y la función vectorial $b(t)$ dadas por

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad b(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

i) Halla e^{tA}.
ii) Utilizando la transformada de Laplace resuelve el problema de valor inicial $\dot{X} = AX + b(t)$, $X(0) = [0, 1, 0]$.
iii) Hallar la solución de $\dot{X} = AX + b(t)$, $X(0) = [1, 1, 0]$.

4.– Resuelve el problema de valor inicial

$$\begin{cases} t^2\ddot{y} + t\dot{y} + y = 2\,\mathrm{sen}(\ln t) \\ y(1) = 0, \ \dot{y}(1) = 1. \end{cases}$$

Las preguntas 1 y 2 valen 2 puntos.
Las preguntas 3 y 4 valen 3 puntos

Duración del examen: 3 horas