PRIMER PARCIAL 07/07/2023

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1.– Define, con precisión, qué entendemos por exponencial de una matriz. Demuestra que la función $\varphi(t) = \mathrm{e}^{tA}$ es derivable. A partir de este resultado, enuncia y demuestra la propiedad que relaciona la exponencial de la suma con el producto de las exponenciales.

2.– Sean A y B matrices cuadradas de dimensión n que conmutan. Sea φ una función real continua en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, y sea $C(t) = A + \varphi(t)B$. Prueba que si B es nilpotente de índice 2 entonces la matriz resolvente del sistema $\dot{X} = C(t)X$ es

$$\mathcal{R}(t,\tau) = \mathrm{e}^{(t-\tau)A}\left[I_n + \left(\int_\tau^t \varphi(s)\,ds\right)B\right].$$

3.– Consideremos la matriz A y la función vectorial $b(t)$ dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad b(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4\mathrm{e}^t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

i) Halla e^{tA}.

ii) Halla la solución del problema de valor inicial $\dot{X} = AX + b(t)$, $X(0) = [1,1,0]$.

4.– Halla la solución general de la ecuación diferencial

$$t^2\ddot{y} + t\dot{y} + y = 2\,\mathrm{sen}(\ln t).$$

Resuelve el problema de valor inicial

$$\begin{cases} t^2\ddot{y} + t\dot{y} + y = 2\,\mathrm{sen}(\ln t) \\ y(1) = 0,\ \dot{y}(1) = 1. \end{cases}$$

Las preguntas 1 y 2 valen 2 puntos.
Las preguntas 3 y 4 valen 3 puntos

Duración del examen: 2 horas