Primer parcial 07/06/2023

# Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

**1.–** Enuncia y demuestra el teorema que asegura que todo problema de valor inicial para una ecuación diferencial lineal no homogénea tiene una única solución, que viene dada por la *fórmula de Duhamel* o *fórmula de variación de las constantes*. Indica, claramente, cuales son las hipótesis, y cuáles son las propiedades que usas en cada paso de la demostración.

**2.–** Consideremos una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes de orden $n$ cuyo polinomio característico es $p(s) = (s-\lambda_1)^{m_1}(s-\lambda_2)^{m_2}\cdots(s-\lambda_r)^{m_r}$, con $\lambda_i \neq \lambda_j$ para todo $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, r$. Razona la veracidad de la siguiente afirmación:

> La función de Green para el problema de Cauchy es de la forma
>
> $$\gamma(t) = p_1(t)\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + p_2(t)\mathrm{e}^{\lambda_2 t} + \cdots + p_r(t)\mathrm{e}^{\lambda_r t},$$
>
> donde $p_i(t)$ es un polinomio de grado exactamente $m_i - 1$, para $i = 1, 2, \ldots, r$.

**3.–** Halla la matriz resolvente del sistema de ecuaciones diferenciales lineales $\dot{X} = A(t)X$, donde

$$A(t) = \begin{bmatrix} 2t & 0 & 1 \\ 0 & 2t & 1 \\ 0 & -1 & 2t \end{bmatrix}$$

Utilízala para resolver el problema de valor inicial para el sistema no homogéneo $\dot{X} = A(t)X + b(t)$, $X(0) = [0, 0, 1]$, siendo $b(t) = [t, 0, 0]$.

**4.–** Consideremos la ecuación diferencial

$$\ddot{y} - 2\dot{y} + 2y = 2\mathrm{e}^t \operatorname{sen}(t).$$

i) Halla la solución general.
ii) Halla la solución que satisface $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 1$.

**Las preguntas 1 y 2 valen 2 puntos. Las preguntas 3 y 4 valen 3 puntos.**

**El examen tiene una duración de 2 horas**