PRIMER PARCIAL 13/05/2024

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1.– Define, con total precisión, qué entendemos por exponencial de una matriz. Demuestra que la exponencial de tA es derivable. Demuestra que la exponencial de una matriz es una matriz invertible. En ambos casos, enuncia con precisión lo que vas a demostrar.

2.– Supongamos que la matriz $A \in \mathbb{R}^{(2,2)}$ tiene valores propios complejos $\alpha \pm i\omega$, con $\omega \neq 0$. Demuestra que

$$\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{\alpha t}\left[\cos(\omega t) I_2 + \frac{1}{\omega}\operatorname{sen}(\omega t)(A - \alpha I_2)\right],$$

donde I_2 es la matriz identidad.

3.– Sean $A(t)$ y $b(t)$ la funciones

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2t \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad b(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{bmatrix}.$$

Halla la matriz resolvente del sistema $\dot{X} = A(t)X$. Halla la solución del problema de valor inicial $\dot{X} = A(t)X + b(t)$, $X(0) = [1, 1, 1]$

4.– Halla la solución del problema de valor inicial

$$t^2\ddot{y} - 2y + 2t = 0$$
$$y(1) = 0, \ \dot{y}(1) = 1$$

Las preguntas 1 y 2 valen 2 puntos.
Las preguntas 3 y 4 valen 3 puntos.

Duración del examen: 2 horas.