Primer parcial 12/01/2024

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1.– Para un sistema homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables, define qué es la matriz resolvente y enuncia sus principales propiedades. Enuncia y demuestra el teorema que nos proporciona la solución de un problema de valor inicial para un sistema diferencial lineal no homogéneo (fórmula de variación de las constantes). En cada paso de la demostración indica la propiedad que usas (y que deberás haber enunciado en la primera parte).

2.– Supongamos que la matriz $A \in \mathbb{R}^{(2,2)}$ tiene valores propios complejos $\alpha \pm i\omega$, con $\omega \neq 0$. Demuestra que

$$\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{\alpha t}\Big[\cos(\omega t) I_2 + \frac{1}{\omega}\operatorname{sen}(\omega t)(A - \alpha I_2)\Big],$$

donde I_2 es la matriz identidad.

3.– Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ t^2-1\end{bmatrix}.$$

i) Halla la matriz e^{tA} (siendo A la matriz de coeficientes del sistema anterior).

ii) Halla la solución de dicho sistema con $X(0) = [-1, 1, -1]$.

4.– Consideremos la ecuación diferencial

$$t\ddot{y} - (2t+1)\dot{y} + (t+1)y = 0.$$

i) Prueba que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $y = \mathrm{e}^{at}$ es una solución de dicha ecuación.

ii) Halla su solución general.

iii) Halla la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} t\ddot{y} - (2t+1)\dot{y} + (t+1)y = t^2\mathrm{e}^{2t}\\ y(1) = 1,\ \dot{y}(1) = \mathrm{e}^2 + 1.\end{cases}$$

Las preguntas 1 y 2 valen 2 puntos.
Las preguntas 3 y 4 valen 3 puntos.

Duración del examen: 2 horas 30 minutos.