Examen global, primera convocatoria 25/06/2021

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1.– Enuncia y demuestra el teorema de existencia y unicidad local para ecuaciones diferenciales escalares no autónomas (exactas).

2.– Consideremos una ecuación diferencial escalar de orden n homogénea y con coeficientes constantes. Sea $G(s)$ la transformada de Laplace de la función de Green (para el problema de Cauchy). Razona la veracidad de cada una de las siguientes afirmaciones:

1. Toda solución de la ecuación diferencial está acotada para $t \geq 0$ si y solo si todos los polos de $G(s)$ tienen parte real menor o igual que cero.
2. Toda solución de la ecuación diferencial tiende a cero cuando $t \to +\infty$ si y solo si todos los polos de $G(s)$ tienen parte real negativa.

Si son ciertas demuéstralas; si son falsas da un contraejemplo. Recuerda que los polos de una función racional son los ceros del denominador de dicha función.

3.– Sea $f(t,x)$ una función real con dominio $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ para la que existe $m \in \mathbb{R}$ tal que se satisface

$$f(\lambda t, \lambda^m x) = \lambda^{m-1} f(t,x), \qquad \forall \lambda > 0, \forall (t,x) \in \mathcal{D}.$$

Comprueba que el cambio de variable $y = x/t^m$ transforma la ecuación diferencial $\dot{x} = f(t,x)$ en una ecuación de variables separadas.

Utiliza el resultado anterior para hallar la solución implícita de la ecuación diferencial

$$\dot{x} = -\frac{1}{2tx}\Big(x^2 + \frac{2}{t}\Big).$$

Halla la solución maximal de esta ecuación con condición inicial $x(1) = 1$, justificando su maximalidad.

4.– Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x} = (\mu - 1)x + yz \\ \dot{y} = (y^2 - 3y)\mathrm{e}^{-y^2} \\ \dot{z} = -\mu z + y^2, \end{cases}$$

donde μ es un parámetro real. Demuestra que el dominio de sus soluciones es la recta real. Para $\mu \neq 0, 1$, analiza la estabilidad de sus puntos de equilibrio. Halla las derivadas parciales de la solución general $(x, y, z) = \psi(t, t_0, x_0, y_0, z_0, \mu)$ con respecto a los datos iniciales y al parámetro en el punto $(t, t_0 = 0, x_0 = 1, y_0 = 0, z_0 = 1, \mu = 0)$

5.– Halla la matriz resolvente del sistema de ecuaciones diferenciales lineales $\dot{X} = A(t)X$, donde

$$A(t) = \begin{bmatrix} 2t & 0 & 1 \\ 0 & 2t & 1 \\ 0 & -1 & 2t \end{bmatrix}$$

Utilízala para resolver el problema de valor inicial para el sistema no homogéneo $\dot{X} = A(t)X + b(t)$, $X(0) = [0, 0, 1]$, siendo $b(t) = [t, 0, 0]$.