EXPONENCIAL DE UN NÚMERO COMPLEJO

EDUARDO MARTÍNEZ

1. LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Recordemos que el cuerpo de los números complejos es el conjunto $\mathbb{R}^2$ con la operación de suma habitual y el producto interno definido por

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2).$$

Los números complejos de la forma $(a, 0)$ se dice que son reales, y se identifican con los números reales $a \equiv (a, 0)$. Los complejos de la forma $(0, b)$, con $b \neq 0$, se dice que son imaginarios. El número complejo $i = (0, 1)$ se llama unidad imaginaria. En términos de i podemos expresar el número complejo (a, b) en la forma $(a, b) = a + bi$. En particular, un número imaginario es de la forma $(0, b) = bi$. El cuadrado de un número real no nulo es real y positivo, mientras que el cuadrado de un número imaginario no nulo es real y negativo, ya que $i^2 = -1$.

La parte real del número complejo $z = a + ib$ es a, mientras que la parte imaginaria es b. Escribimos $a = \mathfrak{Re}(z)$ y $b = \mathfrak{Im}(z)$. El número complejo conjugado de un número complejo $z = a + bi$ es $\bar{z} = a - bi$. En términos de z y su complejo conjugado $\bar{z}$ se tiene

$$\mathfrak{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \qquad \text{y} \qquad \mathfrak{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Se llama módulo de un número complejo $z = a + bi$ al número real $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$. El módulo de z es nulo si y sólo si $z = 0$. En términos de módulo y complejo conjugado, el inverso (para el producto) de un número complejo z es $z^{-1} = 1/z = \bar{z}/|z|^2$. Así, la división de complejos toma la forma $z_1/z_2 = z_1\bar{z}_2/|z_2|^2$.

Se llama argumento de un número complejo $z = a + ib$ al ángulo polar θ de z como punto de $\mathbb{R}^2$, esto es, al ángulo que forma el vector (a, b) con el semieje real positivo $\{\, (a, 0) \mid a > 0 \,\}$. Evidentemente, dicho ángulo esta indeterminado por la adición de un múltiplo de 2π, por lo que cuando hablemos de 'el argumento' de un número complejo z nos estamos refiriendo al conjunto

$$\arg(z) = \{\, \theta + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \,\},$$

mientras que cuando hablemos de 'un argumento' de z nos estamos refiriendo a uno de los elementos de dicho conjunto.

2. Exponencial compleja

La aplicación exponencial se puede definir también para números complejos, de manera que se mantienen sus propiedades algebraicas.

Definición 2.1: *Dado un número complejo $z = a + ib \in \mathbb{C}$, definimos la **exponencial** de z como el número complejo $\mathrm{e}^z \in \mathbb{C}$ dado por la expresión*

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{a+ib} = \mathrm{e}^a[\cos(b) + i\sin(b)].$$

Proposición 2.2: *La exponencial de un número complejo satisface las siguientes propiedades:*

- $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\,\mathrm{e}^{z_2}$
- $\mathrm{e}^{-z} = 1/\,\mathrm{e}^{z}$
- $\mathrm{e}^{\bar{z}} = \overline{\mathrm{e}^{z}}$

Dem. Si $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$ entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{z_1}\,\mathrm{e}^{z_2} &= \mathrm{e}^{a_1}[\cos(b_1) + i\sin(b_1)]\,\mathrm{e}^{a_2}[\cos(b_2) + i\sin(b_2)] \\
&= \mathrm{e}^{a_1+a_2}\big[\big(\cos(b_1)\cos(b_2) - \sin(b_1)\sin(b_2)\big) + \\
&\qquad\qquad + i\big(\sin(b_1)\cos(b_2) + \cos(b_1)\sin(b_2)\big)\big] \\
&= \mathrm{e}^{a_1 a_2}[\cos(b_1 + b_2) + i\sin(b_1 + b_2)] \\
&= \mathrm{e}^{z_1+z_2}
\end{aligned}$$

De la propiedad anterior se tiene que el inverso para el producto de e^{z} es e^{-z}, sin más que tomar $z_1 = z$ y $z_2 = -z$. Finalmente, si $z = a + ib$,

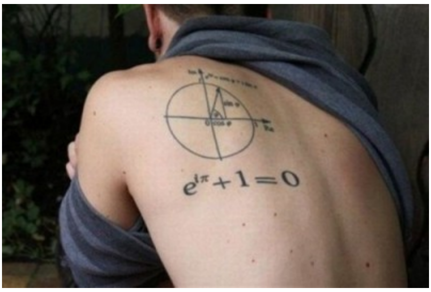
$$\mathrm{e}^{\bar{z}} = \mathrm{e}^{a-ib} = \mathrm{e}^{a}[\cos(-b) + i\sin(-b)] = \mathrm{e}^{a}[\cos(b) - i\sin(b)] = \overline{\mathrm{e}^{a+ib}} = \overline{\mathrm{e}^{z}}$$

que concluye la demostración. □

Ejemplo 2.3: Tomando el número complejo $z = i\pi$ se obtiene la siguiente igualdad

$$\boxed{\mathrm{e}^{i\pi} + 1 = 0}$$

que se conoce como ***fórmula de Euler***. Es una de las mas bellas de las matemáticas, puesto que relaciona los 5 números más importantes $0, 1, \pi, \mathrm{e}, i$, las operaciones suma y producto, junto con la relación de igualdad.



Algunos otros valores a recordar son

$$\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} = i, \qquad \mathrm{e}^{i\pi} = -1, \qquad \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{2}} = -i, \qquad \mathrm{e}^{i2\pi} = 1,$$

como puede comprobarse fácilmente. ◁

Nótese la relación entre la forma exponencial y las coordenadas polares de un número complejo (como elemento de $\mathbb{R}^2$). El módulo y el argumento de e^{a+ib} son

$$|\,\mathrm{e}^{a+ib}\,| = \mathrm{e}^{a} \qquad \text{y} \qquad \arg(\mathrm{e}^{a+ib}) = \{\, b + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\,\}.$$

En otras palabras

$$|\,\mathrm{e}^{z}\,| = \mathrm{e}^{\mathfrak{Re}(z)} \qquad \text{y} \qquad \arg(\mathrm{e}^{z}) = \{\, \mathfrak{Im}(z) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\,\}.$$

Como consecuencia, todo número complejo no nulo w se puede escribir en la forma $w = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$, donde $r = |w|$ y $\theta \in \arg(w)$.

En particular, los números complejos de módulo unidad se pueden escribir como la exponencial de un imaginario puro

$$|w| = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad w = \mathrm{e}^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Se deducen de aquí las siguientes expresiones para la función seno y coseno en términos de exponenciales

$$\cos\theta = \mathfrak{Re}(\mathrm{e}^{i\theta}) = \frac{\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta}}{2} \quad \text{y} \quad \sin\theta = \mathfrak{Im}(\mathrm{e}^{i\theta}) = \frac{\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}.$$

Ejercicio 2.4: Obtener las fórmulas trigonométricas para el ángulo doble a partir de la igualdad $\mathrm{e}^{i2\theta} = (\mathrm{e}^{i\theta})^2$.

Ejemplo 2.5: Con ayuda de la exponencial es fácil obtener las n raíces n-ésimas de un número complejo. Si expresamos $w = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$, entonces sus raíces n-ésimas son

$$\sqrt[n]{r}\ \mathrm{e}^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \qquad \text{con } k = 0,\dots,n-1.$$

En particular, las n raíces n-ésimas de la unidad son

$$\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}k} = \cos\Big(2\pi\frac{k}{n}\Big) + i\sin\Big(2\pi\frac{k}{n}\Big),$$

con $k = 0,\dots,n-1$. En efecto, la potencia n-ésima de $\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}k}$ es $(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}k})^n = \mathrm{e}^{i2\pi k} = 1$. Además los n números complejos anteriores son todos distintos. ◁

Derivada e integral. Una función de variable real con valores complejos es una función $\zeta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, en otras palabras una función de variable real con valores en $\mathbb{R}^2$. Separando parte real e imaginaria, podemos expresar dicha función en la forma $z = \zeta(t) = f(t) + ig(t)$, donde f y g son funciones reales de variable real. La derivada de ζ se define por

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{df}{dt} + i\frac{dg}{dt}.$$

Consecuentemente, la integral (indefinida) de ζ es

$$\int [f(t) + ig(t)]\,dt = \int f(t)\,dt + i\int g(t)\,dt,$$

de manera que se verifican las propiedades usuales de derivación e integración, y la relación entre ambas operaciones.

Ejercicio 2.6: Demostrar que se satisface la regla de Leibniz: si ζ y η son dos funciones complejas de variable real entonces

$$\frac{d}{dt}(\zeta\eta) = \frac{d\zeta}{dt}\eta + \zeta\frac{d\eta}{dt}.$$

Deducir de aquí la formula de integración por partes.

Proposición 2.7: *Si z es un número complejo, la derivada de la función compleja de variable real $\zeta(t) = \mathrm{e}^{tz}$ es*

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{e}^{tz} = z\,\mathrm{e}^{tz}.$$

La integral indefinida de $\zeta(t) = \mathrm{e}^{tz}$, con $z \neq 0$, es

$$\int \mathrm{e}^{tz}\ dt = \frac{1}{z}\,\mathrm{e}^{tz} + C,$$

con C una constante compleja arbitraria.

Dem. En efecto, para un número imaginario $z = ib$

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{e}^{itb} = \frac{d}{dt}[\cos(bt) + i\sin bt] = -b\sin(bt) + ib\cos(bt) = ib\,\mathrm{e}^{itb}.$$

Para un número complejo general, $z = a + ib$ tenemos $\mathrm{e}^{t(a+ib)} = \mathrm{e}^{ta}\,\mathrm{e}^{itb}$ y derivando

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{e}^{ta}\,\mathrm{e}^{itb} = a\,\mathrm{e}^{ta}\,\mathrm{e}^{itb} + \mathrm{e}^{ta}\,ib\,\mathrm{e}^{itb} = (a+ib)\,\mathrm{e}^{ta}\,\mathrm{e}^{itb} = (a+ib)\,\mathrm{e}^{t(a+ib)}.$$

Esto prueba la primera afirmación. Para la segunda, simplemente hay que notar que la derivada del término de la derecha nos da el integrando que aparece a la izquierda. $\square$

La definición de exponencial compleja que se ha dado puede parecer caprichosa. Existe una razón más profunda, que se obtiene al considerar la serie exponencial. Dado un número complejo $z \in \mathbb{C}$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

es absolutamente convergente (i.e. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$ es convergente). Se puede ver que la suma de la serie anterior es precisamente la exponencial del número complejo z. Por ejemplo, para $z = ib$, sumando por un lado los términos de índice par y por otro los de índice impar (ambas series convergen) obtenemos

$$\mathrm{e}^{ib} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ib)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ib)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Como $i^{2n} = (i^2)^n = (-1)^n$, y por tanto $i^{2n+1} = (-1)^n\, i$, se tiene que

$$\mathrm{e}^{ib} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, b^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, b^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

En estas series reconocemos los desarrollos en serie de Taylor de la funciones coseno y seno, de forma que $\mathrm{e}^{ib} = \cos(b) + i \sin(b)$.