Límite de una sucesión de funciones

Se presenta a continuación un resultado sobre convergencia de sucesiones de funciones que permite probar que la función límite de una sucesión de funciones continuas es una función continua.

Teorema. *Para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea $\varphi_k \colon \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ una función continua en $\mathcal{A}$. Supongamos que existen constantes M_k tales que $||\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)|| \leq M_k$, para todo $x \in \mathcal{A}$, y tales que la serie $\sum_k M_k$ es convergente. Entonces, para cada $x \in \mathcal{A}$, la sucesión $\{\varphi_k(x)\}$ es convergente y la función límite (definida por $\varphi(x) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x)$) es una función continua en $\mathcal{A}$. En otras palabras, para todo $x_0 \in \mathcal{A}$,*

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{x\to x_0} \varphi_k(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x).$$

Además, si $\mathcal{A} = I \times \mathcal{P} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$ con $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo compacto, entonces para cada $\mu \in \mathcal{P}$ y cada $t, t_0 \in I$ se satisface

$$\int_{t_0}^{t} \lim_{k\to\infty} \varphi_k(\tau, \mu)\, d\tau = \lim_{k\to\infty} \int_{t_0}^{t} \varphi_k(\tau, \mu)\, d\tau.$$

Demostración. Consideremos la serie telescópica $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, donde $f_0(x) = \varphi_0(x)$ y $f_k(x) = \varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)$, para $k \geq 1$. Entonces $\varphi_k(x) = \sum_{j=0}^{k} f_j(x)$ y la convergencia de la serie equivale a la convergencia de la sucesión dada. Además, en caso de ser convergente, su suma es el límite de tal sucesión, $\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$.

Para cada $x \in \mathcal{A}$, cada componente de la serie $\sum f_n(x)$ es absolutamente convergente ya que

$$\sum_k |f_n(x)_i| \leq \sum_k ||f_n(x)|| \leq \sum_k M_k$$

que converge.

Para $x \in \mathcal{A}$, sea $\varphi(x) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ la función límite. Veamos, por medio de la definición de límite, que la función φ es continua en cualquier punto $x_0 \in \mathcal{A}$. Sea $\epsilon > 0$. Dado que cada función $\varphi_k(x)$ es continua, existe $\delta > 0$ tal que si $||x - x_0|| < \delta$ entonces $||\varphi_k(x) - \varphi_k(x_0)|| < \epsilon/3$. Por otro lado, dado que la serie $\sum_k M_k$ converge, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k > k_0$

entonces $\sum_{j=k+1}^{\infty} M_k < \epsilon/3$. Por tanto, tomando $k > k_0$,

$$\begin{aligned}
||\varphi(x) - \varphi(x_0)|| = \\
&= \left\| [\varphi(x) - \varphi_k(x)] + \Big[\varphi_k(x) - \varphi_k(x_0)\Big] + \Big[\varphi_k(x_0) - \varphi(x_0)\Big] \right\| \\
&\leq \Big\|\varphi(x) - \varphi_k(x)\Big\| + \Big\|\varphi_k(x) - \varphi_k(x_0)\Big\| + \Big\|\varphi_k(x_0) - \varphi(x_0)\Big\| \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\
&= \epsilon,
\end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que, por ser $k > k_0$,

$$||\varphi(y) - \varphi_k(y)|| = \Big\| \sum_{j=k+1}^{\infty} f_j(y) \Big\| \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} ||f_j(y)|| \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} M_j < \frac{\epsilon}{3},$$

tanto para $y = x$ como para $y = x_0$.

Para la integral, consideramos un intervalo compacto $[a, b]$. Sólo es necesario considerar el caso de una función escalar, es decir, el caso $p = 1$. Dado $\epsilon > 0$, como la serie numérica $\sum_k M_k$ converge, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k > k_0$ entonces $\sum_{j=k+1}^{\infty} M_j < \epsilon/(b-a)$, y así

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b \varphi(\tau, \mu)\, d\tau - \int_a^b \varphi_k(\tau, \mu)\, d\tau \right| &= \left| \int_a^b [\varphi(\tau, \mu) - \varphi_k(\tau, \mu)]\, d\tau \right| \\
&= \left| \int_a^b \sum_{j=k+1}^{\infty} f_j(\tau, \mu)\, d\tau \right| \\
&\leq \int_a^b \sum_{j=k+1}^{\infty} |f_j(\tau, \mu)|\, d\tau \\
&\leq \int_a^b \sum_{j=k+1}^{\infty} M_j\, d\tau \\
&< \frac{\epsilon}{b-a} \int_a^b d\tau \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Esto prueba que $\lim_{k\to\infty} \int_a^b \varphi_k(\tau, \mu)\, d\tau = \int_a^b \varphi(\tau, \mu)\, d\tau$. El resultado se sigue considerando $a = t_0$ y $b = t$ si $t > t_0$, o bien $a = t$ y $b = t_0$ si $t < t_0$. $\square$