

## CONTROLABILIDAD DE SISTEMAS NO LINEALES

EDUARDO MARTÍNEZ

Estas notas son una versión provisional, en desarrollo, y pueden contener erratas e imprecisiones.

### 1. LA NOCIÓN DE CONTROLABILIDAD

Consideremos un sistema de control autónomo

$$\dot{x} = f(x, u).$$

Supondremos que el espacio de estados  $M$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$ , o más generalmente una variedad diferenciable, y denotaremos por  $U$  el conjunto donde toman valores los controles. Para cada  $u \in U$  supondremos que el campo vectorial  $f_u$  en  $M$  definido por  $f_u(x) = f(x, u)$  es diferenciable (de clase  $C^k$  con  $k \geq 1$ ).

Supondremos que las funciones de control son constantes a trozos, aunque esta hipótesis se puede relajar, admitiendo como válidos otras clases de controles que se dirán controles admisibles.

**DEFINICIÓN 1.1:** Sea  $x_0$  un punto de  $M$ . Un punto  $x_1 \in M$  se dice **alcanzable** desde  $x_0$  en tiempo  $T > 0$  si existe un control admisible  $\omega: [0, T] \rightarrow U$  tal que la solución del problema de valor inicial  $\dot{x} = f(x, \omega(t))$ ,  $x(0) = x_0$  está definida en  $[0, T]$  y satisface  $x(T) = x_1$ . El conjunto de puntos alcanzables desde  $x_0$  en tiempo  $T$  se denota  $\mathcal{R}(x_0, T)$ . Un punto  $x_1$  es alcanzable desde  $x_0$  si es alcanzable para algún tiempo  $T > 0$ . El conjunto de puntos alcanzables desde  $x_0$  se denotará  $\mathcal{R}(x_0)$ . Diremos que el sistema es controlable<sup>1</sup> desde  $x_0$  si  $\mathcal{R}(x_0) = M$ .

En general, no es razonable suponer que el conjunto de puntos alcanzables desde un punto dado tenga una estructura sencilla. Aún en el caso  $M = \mathbb{R}^n$  y  $U = \mathbb{R}^m$  dicho conjunto no será un subespacio lineal ni una variedad diferenciable. Por ejemplo, para el sistema  $\dot{x}_1 = u_1^2$ ,  $\dot{x}_2 = u_2^2$ , con  $(u_1, u_2) \in U = \mathbb{R}^2$ , el conjunto de puntos alcanzables desde el origen es el primer cuadrante del plano

$$\mathcal{R}((0, 0)) = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \}.$$

Aún cuando no sepamos calcular explícitamente el conjunto de puntos alcanzables, nos interesará obtener propiedades de él.

---

*Date:* Curso de doctorado 1994, Febrero 2014.

<sup>1</sup>Para un sistema de control en tiempo continuo la distinción entre alcanzabilidad y controlabilidad es superflua

**DEFINICIÓN 1.2:** Decimos que el sistema de control  $\dot{x} = f(x, u)$  es **accesible** desde  $x_0$  si el conjunto  $\mathcal{R}(x_0)$  tiene interior no vacío. Decimos que el sistema de control es **fuertemente accesible** desde  $x_0$  si para todo  $T > 0$  el conjunto  $\mathcal{R}(x_0, T)$  tiene interior no vacío.

Nótese que, en las definiciones de accesibilidad, no se exige que el propio punto  $x_0$  esté en el interior de  $\mathcal{R}(x_0)$  o de  $\mathcal{R}(x_0, T)$ . En el ejemplo anterior, se tiene que  $\text{Int } \mathcal{R}((0, 0)) = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  por lo que el sistema es accesible desde el origen. Sin embargo, el origen está fuera de este conjunto por lo que no es controlable, como ya hemos visto. Es fácil ver que el sistema dado es fuertemente accesible desde el origen, puesto que al no estar acotados los controles se tiene  $\mathcal{R}(x_0, T) = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ .

Una clase de sistemas de control que aparece frecuentemente en la práctica es la de los **sistemas afines en los controles**, es decir, sistemas de la forma

$$\dot{x} = g_0(x) + u_1 g_1(x) + u_2 g_2(x) + \cdots + u_m g_m(x),$$

donde  $g_0, g_1, \dots, g_m$  son campos vectoriales diferenciables en una variedad diferenciable  $M$ . El campo vectorial  $g_0$  se llama campo de deriva (*drift*) y los campos vectoriales  $g_i$ , para  $i = 1, \dots, m$ , se llaman entradas (*inputs*). Cuando  $g_0 = 0$ , es decir, en el caso de un sistema de control de la forma

$$\dot{x} = u_1 g_1(x) + u_2 g_2(x) + \cdots + u_m g_m(x),$$

decimos que es un **sistema lineal en los controles**.

## 2. CONTROLABILIDAD POR LINEALIZACIÓN

**2.1. Linealización de un sistema de control.** Consideremos un sistema de control  $\dot{x} = f(x, u)$  de clase  $C^1$  y un punto  $x_0 \in M$ . Para un control dado  $u = \omega(t)$  hallamos la trayectoria del sistema  $x = \xi(t)$ , resolviendo el problema de valor inicial  $\dot{x} = f(x, \omega(t))$ ,  $x(0) = x_0$ , que supondremos definida en un intervalo  $[0, T]$ . Supongamos que  $\omega(t) \in \text{Int}(U)$  para todo  $t \in [0, T]$ , y consideremos variaciones de los controles, es decir, para cada función  $\nu(t)$  con valores en  $\mathbb{R}^m$ , tomamos el control  $u = \omega(t) + s\nu(t)$  y la correspondiente trayectoria  $x = \xi(t, s)$ , comenzando en el mismo punto inicial  $x_0 = \xi(0)$ . La función  $\xi(t, s)$  es derivable con respecto a  $s$ . En  $s = 0$  su derivada  $W(t) = \frac{\partial \xi}{\partial s}(t, 0)$  satisface la ecuación diferencial

$$\dot{W}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t), \omega(t))W(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(\xi(t), \omega(t))\nu(t),$$

con  $W(0) = 0$ , ya que  $\xi(0, s) = x_0$  para todo  $s$ . La demostración de este hecho se puede encontrar en los libros sobre ecuaciones diferenciales (por ejemplo, en el libro de Hartman [2]).

**DEFINICIÓN 2.1:** Dada un control  $u = \omega(t)$  y su correspondiente trayectoria  $x = \xi(t)$ , el sistema de control lineal (no autónomo)

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + B(t)\mathbf{u}$$

con  $A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t), \omega(t))$  y  $B(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(\xi(t), \omega(t))$ , se denomina **linealización del sistema de control**  $\dot{x} = f(x, u)$  a lo largo de  $(\xi(t), \omega(t))$ .

De la definición se tiene que si desarrollamos la solución del problema  $\xi(s, t)$  en potencias de  $s$  obtenemos  $\xi(s, t) = \xi(t) + sW(t) + o(s)$ . Por tanto, en primera aproximación, el cambio en la trayectoria es  $\xi(s, t) - \xi(t) \approx sW(t)$ .

**Puntos de equilibrio.** Uno de los problemas interesantes que se encuentran frecuentemente en la práctica es el de la controlabilidad de un sistema en un entorno de un punto de equilibrio.

Consideremos un punto de equilibrio de  $f$ , es decir, una pareja estado-control  $(x_0, u_0)$  tales que  $f(x_0, u_0) = 0$ . Para estudiar la controlabilidad local en torno a dichos puntos, podemos utilizar el método de linealización. El control  $u = \omega(t) = u_0$  (constante) produce la trayectoria  $x = \xi(t) = x_0$  (constante), por lo que podemos plantearnos la linealización a lo largo de  $(\xi(t), \omega(t)) = (x_0, u_0)$ . En este caso las matrices  $A(t)$  y  $B(t)$  son constantes,  $A(t) \equiv A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0)$  y  $B(t) \equiv B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0)$  por lo que el sistema de control linealizado es un sistema autónomo.

**TEOREMA 2.2:** Sea  $(x_0, u_0)$  un punto de equilibrio de un sistema de control  $\dot{x} = f(x, u)$  de clase  $C^1$ , con  $u_0 \in \text{Int}(U)$ . Consideremos la linealización del sistema en torno a dicho punto

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$$

siendo  $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0)$  y  $B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0)$ . Si este sistema lineal es controlable, entonces para cada  $T > 0$  y cada  $\epsilon > 0$  el conjunto de puntos que se pueden alcanzar desde  $x_0$  en tiempo  $T$  con controles tales que  $\sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\| < \epsilon$  contiene un entorno abierto no vacío de  $x_0$ . En particular, el sistema es fuertemente accesible desde  $x_0$ .

**DEM.** Dado que el sistema linealizado es controlable, existen controles  $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  contantes a trozos definidos en  $[0, T]$  tales que, para el sistema lineal, el control  $\mathbf{u} = \omega_i(t)$  lleva el origen  $\mathbf{x}(0) = 0$  al punto  $\mathbf{x}(T) = e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , para  $i = 1, \dots, n$ . De esta forma, el control  $\mathbf{u} = \omega(t, \xi) = \sum_{i=1}^n \xi^i \omega_i(t)$  lleva el origen al punto  $\mathbf{x}(T) = \xi$ . Además, fijado  $\epsilon > 0$ , se puede tomar la variable  $\xi$  en un abierto tal que  $\|\omega(t, \xi)\| < \epsilon$ .

Con ayuda de dichos controles, definimos la aplicación  $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  por  $\Phi(\xi) = x(T, \xi)$  donde  $x(t, \xi)$  es la solución del problema de valor inicial  $\dot{x} = f(x, \omega(t, \xi))$ ,  $x(0) = x_0$ . La aplicación  $\Phi$  es localmente invertible en un entorno de  $\xi = 0$  ya que su diferencial es  $D\Phi(0)(\zeta) = \left. \frac{d}{ds} x(T, s\zeta) \right|_{s=0} = x(T, \zeta)$  donde  $x(t, \zeta)$  es la solución del sistema linealizado con condiciones iniciales nulas y controles  $u = \omega(t, \zeta)$ , es decir, la

solución del problema de valor inicial  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\omega(t, \zeta)$ ,  $\mathbf{x}(0) = 0$ . Como  $\mathbf{x}(T) = \zeta^i e_i = \zeta$ , se tiene que  $D\Phi(0)(\zeta) = \zeta$ , de donde  $D\Phi(0) = I_n$ , que es invertible.  $\square$

**EJERCICIO 2.3:** Generalizar el resultado anterior para una trayectoria  $x = \gamma(t)$ ,  $u = \omega(t)$  cualquiera (no necesariamente de equilibrio). Para ello obtener la linealización a lo largo de dicha trayectoria (que será un sistema de control lineal no autónomo), y suponiendo que éste sea controlable probar que el sistema no lineal también lo es.

**NOTA 2.4:** El mismo resultado se obtiene para el conjunto de puntos  $x$  desde los que se puede alcanzar el punto de equilibrio  $p$ , ya que la linealización del sistema opuesto  $\dot{x} = -f(x, u)$  es controlable si y sólo si también lo es la linealización del sistema original.  $\diamond$

**NOTA 2.5:** La demostración del Teorema 2.2 (y también la del ejercicio anterior) puede expresarse en términos más correctos y sencillos como sigue. Consideremos un espacio de Banach de controles admisibles  $(L^\infty([0, T], M))$ , por ejemplo y la aplicación estado final  $E_T(u) = x(T)$  donde  $x(t)$  es la solución de  $\dot{x} = f(x, u)$  con  $x(0) = x_0$ . Linealizamos el sistema a lo largo de una trayectoria  $u = \omega(t)$ ,  $x = \gamma(t)$  y obtenemos el sistema lineal  $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + B(t)\mathbf{u}(t)$ . Las condiciones iniciales adecuadas son  $\mathbf{x}(0) = 0$ , debido a que  $x(0) = x_0$  es un extremo fijo. La misma aplicación estado final, pero para el sistema linealizado es  $\mathbf{E}_T^\omega(\mathbf{u}) = \mathbf{x}(T)$ , que es lineal. Entonces,  $E_T$  es diferenciable y su diferencial es  $DE_T(\omega)\mathbf{u} = \mathbf{E}_T^\omega(\mathbf{u})$ .

Si el sistema linealizado es controlable, entonces la aplicación  $\mathbf{E}_T^\omega$  es sobreyectiva. Tomando una base cualquiera  $\{a_i\}$  de  $\mathbb{R}^n$ , existen controles  $\nu_i: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$  tales que  $\mathbf{E}_T^\omega(\nu_i) = a_i$ . La aplicación  $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $\Phi(x) = E_T(\omega + \sum_{i=1}^n (x^i - x_0^i)\nu_i)$  es una aplicación localmente invertible en un entorno de  $0 \in \mathbb{R}^n$  ya que su diferencial en el origen viene dada por

$$D\Phi(0)\zeta = \frac{d}{ds} E_T(\omega + s \sum_{i=1}^n \zeta^i \nu_i) \Big|_{s=0} = \mathbf{E}_T^\omega(\sum_{i=1}^n \zeta^i \nu_i) = \sum_{i=1}^n \zeta^i a_i,$$

que es claramente invertible (aplica la base canónica en la base  $a_i$ ). El caso considerado en el Teorema 2.2 es el caso  $\omega(t) = u_0 = \text{constante}$  y  $\gamma(t) = x_0 = \text{constante}$ , un punto de equilibrio.  $\diamond$

**EJEMPLO 2.6:** Péndulo invertido

... ..  $\triangleleft$

A pesar de que este resultado resuelve muchos problemas de control, no es difícil encontrar sistemas interesantes donde no se cumplen las hipótesis.

**EJEMPLO 2.7:** Consideremos el siguiente modelo matemático para un patinete, o un carrito de la compra,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = u_1 \begin{bmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} + u_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

donde  $(x, y)$  describe la posición (de la rueda trasera) del patinete en el plano y  $\theta$  es el ángulo que forma el patinete con el eje  $x$  (u otra dirección cualquiera fija). Si tomamos  $u_2 = 0$ , estamos manteniendo la rueda delantera en la dirección del patinete, y éste se traslada sobre la recta en la que está orientado. Si tomamos  $u_1 = 0$ , estamos manteniendo la rueda delantera en la dirección perpendicular al patinete, obteniendo un movimiento de giro con centro la rueda trasera. Supondremos que cada uno de los controles puede tomar, al menos, los valores  $-1, 0$  y  $+1$ .

Para este sistema, todo punto  $x_0 = (x_0, y_0, \theta_0)$ , con  $u_0 = (0, 0)$ , es de equilibrio, y el sistema linealizado no es linealmente controlable ya que  $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0) = 0$  y  $\text{rango}(\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0)) = 2$ .

Del análisis lineal, pudiera parecer que estos son los únicos movimientos netos que podemos conseguir, y que no es posible obtener un movimiento neto en la dirección perpendicular al patinete, pero no es así. Pensemos en lo que ocurre cuando aparcamos. En una posición  $(x, y, \theta) = (0, d, 0)$  paralela al eje  $x$  a distancia  $d$  de éste, para llevarlo a la posición  $(x, y, \theta) = (0, 0, 0)$  lo que hacemos es: (1) trasladarnos hacia adelante, (2) girar el patinete en sentido antihorario un cierto ángulo sin desplazarnos, (3) trasladarnos hacia atrás manteniendo la dirección, y (4) girar el patinete en sentido horario hasta colocarlo paralelo al eje.

En cada uno de los anteriores movimientos estamos utilizando uno de los controles y anulando el otro. Veamos cual es el resultado si utilizamos el mismo tiempo  $h$  en cada parte del movimiento, con valores  $-1, 0$  o  $+1$  para los controles.

1.  $(u_1, u_2) = (1, 0)$ . La posición inicial es  $(0, d, 0)$ , y la ecuación diferencial a resolver es  $\dot{\theta} = 0, \dot{x} = \cos \theta, \dot{y} = \sin \theta$ , que tiene solución  $\theta(t) = 0, x(t) = t, y(t) = d$ . Por tanto la posición después de un tiempo  $h$  es  $(h, d, 0)$ .
2.  $(u_1, u_2) = (0, 1)$ . La ecuación diferencial a resolver es  $\dot{\theta} = 1, \dot{x} = 0, \dot{y} = 0$ . La posición después de un tiempo  $h$  es  $(h, d, h)$ .
3.  $(u_1, u_2) = (-1, 0)$ . La ecuación diferencial a resolver es  $\dot{\theta} = 0, \dot{x} = -\cos \theta, \dot{y} = -\sin \theta$ , que tiene solución  $\theta(t) = h, x(t) = h - t \cos h, y(t) = d - t \sin h$ . La posición después de un tiempo  $h$  es  $(h - h \cos h, d - h \sin h, h)$ .
4.  $(u_1, u_2) = (0, -1)$ . La ecuación diferencial a resolver es  $\dot{\theta} = -1, \dot{x} = 0, \dot{y} = 0$ , que tiene solución  $\theta(t) = h - t, x(t) = h - h \cos h, y(t) = d - h \sin h$ . La posición después de un tiempo  $h$  es  $(h - h \cos h, d - h \sin h, 0)$ .

En resumen la posición final es

$$(x(4h), y(4h), \theta(4h)) = (0, d, 0) + (h - h \cos h, -h \sin h, 0).$$

Eligiendo  $h$  tal que  $d = h \sin h$  habremos aparcado el patinete<sup>2</sup> Desarrollando en potencias de  $h$  y tomando el término dominante obtenemos

$$(x(4h), y(4h), \theta(4h)) = (0, d, 0) + h^2(0, -1, 0) + O(h^3).$$

de forma que, prescindiendo de los términos de orden superior, el movimiento neto obtenido es perpendicular a la dirección inicial que tenía el patinete.  $\triangleleft$

Veremos en la siguiente sección como entender este fenómeno en términos de una operación entre campos vectoriales que se denomina paréntesis de Lie.

### 3. PARÉNTESIS DE LIE

**3.1. Campos vectoriales como operadores diferenciales.** Además de definir una ecuación diferencial, cada campo vectorial define una derivación. A un campo vectorial

$$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$$

le asociamos la derivación

$$\mathcal{L}_f = f_1(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + f_n(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Si  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  es una función, entonces

$$\mathcal{L}_f \varphi(x) = f_1(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) + \dots + f_n(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x)$$

es simplemente la derivada de  $\varphi$  en el punto  $x$  según el vector  $f(x)$ . Evidentemente, cada operador de derivación parcial  $D$  como el anterior define un único campo vectorial  $f$  tal que  $D = \mathcal{L}_f$ , que se puede hallar fácilmente derivando cada una de las funciones coordenadas, es decir, tomando en la expresión anterior  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = x_i$  se tiene

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{L}_f x_i.$$

La composición de dos derivaciones no nos da una nueva derivación, ya que aparecerán derivadas segundas, pero debido al lema de Schwarz, estas mismas derivadas segundas aparecen si componemos las derivaciones en orden contrario. Por tanto, a cada pareja de campos vectoriales  $f, g$  le podemos asociar un nuevo campo vectorial  $[f, g]$  que llamaremos **paréntesis de Lie** de  $f$  y  $g$ , por medio de

$$\mathcal{L}_{[f,g]} = \mathcal{L}_f \circ \mathcal{L}_g - \mathcal{L}_g \circ \mathcal{L}_f.$$

<sup>2</sup>Hemos aparcado un poco desplazados hacia adelante. Si en el paso (3) tomamos tiempo  $t = h' = h / \cos h$  entonces la posición final será  $(0, d - h \tan h, 0)$ .

En términos de una función arbitraria,

$$\mathcal{L}_{[f,g]}\varphi = \mathcal{L}_f(\mathcal{L}_g\varphi) - \mathcal{L}_g(\mathcal{L}_f\varphi).$$

Es fácil ver que, en términos de la diferencial  $D$  de funciones entre espacios  $\mathbb{R}^n$ , se obtiene

$$[f, g](x) = Dg(x)f(x) - Df(x)g(x).$$

En definitiva el paréntesis de Lie es fácilmente calculable en términos de las derivadas parciales de las componentes de  $f$  y  $g$ .

**PROPOSICIÓN 3.1:** *El paréntesis de Lie satisface las siguientes propiedades:*

1.  $[f, g] = -[g, f]$
2.  $[f, \lambda g + \mu h] = \lambda[f, g] + \mu[f, h]$
3.  $[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$
4.  $[f, \varphi g] = \varphi[f, g] + (\mathcal{L}_f\varphi)g$ ,

para  $f, g, h$  campos vectoriales,  $\varphi$  una función, y  $\lambda, \mu$  números reales.

Las tres primeras propiedades equivalen a que el espacio vectorial real de los campos vectoriales con el paréntesis de Lie tiene estructura de álgebra de Lie. De ellas, la única que no es obvia es la tercera, que se denomina *identidad de Jacobi*.

**3.2. Flujo de un campo vectorial.** Veamos a continuación cuál es la relación entre nuestro problema y el paréntesis de Lie que acabamos de definir. Recordemos que dado un campo vectorial  $f$ , la solución general de la ecuación diferencial  $\dot{x} = f(x)$  es  $x(t) = \phi_t^f(x_0)$ , donde  $x_0 = x(0)$  es el valor inicial. La aplicación  $\phi_t^f$  se llama **flujo local** de  $f$  y se satisfacen las siguientes igualdades

- $\phi_0^f(x) = x$ ,
- $\phi_{t_1}^f(\phi_{t_2}^f(x)) = \phi_{t_1+t_2}^f(x)$ ,
- $\phi_{-t}^f(x) = (\phi_t^f)^{-1}(x)$ ,

siempre que ambos términos estén definidos. Si el campo vectorial es completo, entonces el flujo es global y las anteriores expresiones son válidas para todos  $t, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  y todo  $x \in \mathbb{R}^n$  (en el dominio de  $f$ ). Para no añadir complicación a la exposición, supondremos que todos los campos vectoriales que tomemos son completos.

Para  $t = h \in \mathbb{R}$ , la aplicación  $\phi_h^f$  debe entenderse como sigue: dado  $x_0$  hallamos la solución  $x = \gamma_{x_0}(t)$  del problema de valor inicial  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x(0) = x_0$ , es decir, la curva integral de  $f$  que pasa por  $x_0$ . El valor de dicha solución en  $t = h$  es precisamente  $\phi_h(x_0) = \gamma_{x_0}(h)$ . Por tanto, la aplicación  $\phi_h^f$  mueve cada punto de su dominio un tiempo  $h$  siguiendo las curvas integrales de  $f$ . Nótese que para  $t$  negativo, la aplicación  $\phi_{-t}^f$  consiste en integrar la ecuación diferencial  $\dot{x} = -f(x)$ , o en otras palabras  $\phi_{-t}^f = \phi_t^{-f}$ .

**EJERCICIO 3.2:** Consideremos dos campos vectoriales  $f$  y  $g$ , y sean  $\phi_t^f$  y  $\phi_t^g$  sus flujos locales respectivos. Para  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , probar que la curva  $\alpha(t) = \phi_{\lambda t}^f(\phi_{\mu t}^g(x_0))$  pasa por  $x_0$  en  $t = 0$  con velocidad  $\dot{\alpha}(0) = \lambda f(x_0) + \mu g(x_0)$ . Como consecuencia, con controles constantes a trozos, en cada punto puedo conseguir movimientos aproximados en cualquier dirección del plano que generan  $f$  y  $g$  en dicho punto.

Destaquemos que el operador diferencial  $\mathcal{L}_f$  puede definirse en términos del flujo de  $f$  por medio de

$$\mathcal{L}_f \varphi(x) = \left. \frac{d}{dt} \varphi(\phi_t^f(x)) \right|_{t=0}.$$

Se puede probar que el paréntesis de Lie puede también calcularse como derivada de uno de los campos vectoriales a lo largo del flujo del otro.

En términos de flujos, el paréntesis de Lie tiene la siguiente interpretación.

**PROPOSICIÓN 3.3:** Consideramos dos campos vectoriales  $f$  y  $g$  y sus respectivos flujos locales  $\phi_t^f$  y  $\phi_t^g$ . Entonces los campos vectoriales  $f$  y  $g$  conmutan si y solo si los flujos conmutan, es decir,

$$[f, g] = 0 \quad \iff \quad \phi_t^f \circ \phi_s^g = \phi_s^g \circ \phi_t^f, \quad \text{para todos } s, t \in \mathbb{R}.$$

En definitiva, a partir de un punto inicial integrar la ecuación diferencial  $\dot{x} = f(x)$  y luego, a partir del punto obtenido, integrar  $\dot{x} = g(x)$  produce el mismo resultado que si lo hacemos en orden contrario, integrando primero  $\dot{x} = g(x)$  a partir del punto inicial y luego  $\dot{x} = f(x)$  a partir del punto obtenido. Como consecuencia, para  $s = t$  obtenemos

$$(\phi_{-t}^g \circ \phi_{-t}^f \circ \phi_t^g \circ \phi_t^f)(x_0) = x_0.$$

Si por contra, los campos vectoriales no conmutan, i.e.  $[f, g] \neq 0$ , podemos preguntarnos cuál es el punto obtenido.

**TEOREMA 3.4:** Para cada punto  $x_0$  se tiene

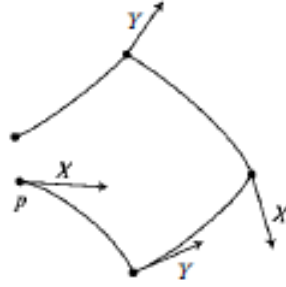
$$(\phi_{-t}^g \circ \phi_{-t}^f \circ \phi_t^g \circ \phi_t^f)(x_0) = x_0 + t^2 [f, g](x_0) + O(t^3).$$

En otras palabras, la curva

$$\gamma(t) = (\phi_{-\sqrt{t}}^g \circ \phi_{-\sqrt{t}}^f \circ \phi_{\sqrt{t}}^g \circ \phi_{\sqrt{t}}^f)(x_0)$$

empieza en  $t = 0$  en  $x_0$  con vector tangente (en  $t = 0^+$ ) igual a  $[f, g](x_0)$ . En consecuencia, realizando conmutaciones el punto  $x_0$  se desplaza aproximadamente en la dirección de  $[f, g]$ .





\*En esta figura:  $X \leftrightarrow f$  e  $Y \leftrightarrow g$

Con más generalidad, se puede probar que la curva

$$\beta_k(t) = ((\phi_{-t/k}^g \phi_{-t/k}^f \phi_{t/k}^g \phi_{t/k}^f) \circ \dots \circ (\phi_{-t/k}^g \phi_{-t/k}^f \phi_{t/k}^g \phi_{t/k}^f))(x_0) \quad (k \text{ veces})$$

converge cuando  $k \rightarrow \infty$  a  $\phi_t^{[f,g]}$ . Igualmente, puede probarse que

$$\alpha_k(t) = ((\phi_{\lambda t/k}^f \circ \phi_{\mu t/k}^g) \circ \dots \circ (\phi_{\lambda t/k}^f \circ \phi_{\mu t/k}^g))(x_0) \quad (k \text{ veces})$$

converge cuando  $k \rightarrow \infty$  a  $\phi_t^{\lambda f + \mu g}$ .

**EJEMPLO 3.5:** Consideremos de nuevo el modelo simplificado de patinete

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = u_1 \begin{bmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} + u_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Vimos que todo punto es de equilibrio, y el sistema linealizado no es controlable. Veamos que es posible moverlo en todas las direcciones.

Es un sistema de la forma  $\dot{x} = u_1 g_1(x) + u_2 g_2(x)$ , con

$$g_1 = \begin{bmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

por lo que es evidente que en  $x_0$  me puedo mover en las direcciones del plano  $\langle g_1(x_0), g_2(x_0) \rangle$ . Si  $[g_1, g_2]$  fuera nulo, o una combinación lineal de  $g_1$  y  $g_2$ , éstas serían todas las posibilidades de movimiento, ya que en dicho caso los flujos de  $g_1$  y  $g_2$  conmutarían, y el sistema no será controlable.

Sin embargo, se tiene que

$$[g_1, g_2] = \begin{bmatrix} -\cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

es linealmente independiente de  $g_1, g_2$ , y por medio de conmutaciones puedo moverme también en esta dirección. En particular, el control sucesivo  $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$ , que usamos para aparcar, me permite moverme, aproximadamente, en la dirección perpendicular a la que apunta el patinete.  $\triangleleft$

Si  $n = 3$ , como en el caso del carrito, con esto hemos terminado, ya que me puedo mover en cada punto en tres direcciones independientes, que me darán un entorno del punto desde el que parto. En el caso  $n > 3$  puedo buscar conmutaciones más complicadas de los controles que hagan aparecer paréntesis de Lie de orden más alto  $[g_i, [g_j, g_k]], [g_i, [g_j, [g_k, g_l]]]$  etc.

#### 4. SISTEMAS LINEALES EN LOS CONTROLES

En esta sección consideraremos un sistema de control lineal en las variables de control,

$$\dot{x} = u_1 g_1(x) + \cdots + u_m g_m(x), \quad u \in \mathbb{R}^m,$$

donde aceptamos como controles admisibles las funciones constantes a trozos con valores en  $U = \mathbb{R}^m$  (o quizás solo un entorno del origen en  $\mathbb{R}^m$ ). Como en el ejemplo del patinete, todo punto es de equilibrio, pero el método de linealización no nos permite dar respuesta al problema de la controlabilidad del sistema, salvo en el caso en el que los vectores  $g_i(x)$  generen  $\mathbb{R}^n$ .

En cada punto  $x_0$ , el vector velocidad de una trayectoria está en el subespacio generado por los vectores  $g_1(x_0), \dots, g_m(x_0)$ . Sabemos además que podemos generar movimiento neto en la dirección del paréntesis de Lie de los anteriores campos vectoriales. Conmutaciones más complicadas pueden proporcionarnos movimiento en otras direcciones obtenidas por paréntesis de Lie sucesivos. Por tanto, es lógico considerar el subespacio generado por todas las direcciones obtenidas por sucesivos paréntesis de Lie.

Nótese que dar un sistema de control lineal es equivalente a dar la familia  $\mathcal{G}$  de campos vectoriales

$$\mathcal{G} = \{g_1, g_2, \dots, g_m\},$$

junto con el conjunto de controles  $U$ .

**PROPOSICIÓN 4.1:** *La menor subálgebra de Lie (del álgebra de Lie real de los campos vectoriales definidos en  $M$ ), que contiene a la familia  $\mathcal{G} = \{g_1, g_2, \dots, g_m\}$  está formada por todas las combinaciones lineales, con coeficientes reales, de campos vectoriales de la forma*

$$[g_{i_k}, [g_{i_{k-1}}, \dots, [g_{i_2}, g_{i_1}] \cdots]], \quad \text{para } k \in \mathbb{N}, \quad i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, m\}.$$

Denotaremos por  $\mathcal{L}(\mathcal{G})$  a dicha subálgebra.

Como hemos indicado, es razonable pensar que, para cada punto  $x_0$ , el conjunto de direcciones en las que puedo moverme contiene al

conjunto formado por los valores de estos campos vectoriales en  $x_0$ , que denotaremos por  $\mathcal{L}(\mathcal{G})(x_0)$ . Cuando los campos vectoriales  $g_i(x)$  son analíticos, es posible probar que  $\mathcal{L}(\mathcal{G})(x_0)$  son todas las direcciones posibles de movimiento desde  $x_0$ . Sin embargo, en el caso general, puede haber más.

**4.1. Órbitas.** Es conveniente definir el conjunto de todos los puntos alcanzables desde  $x_0$  por medio de controles constantes a trozos y estudiar qué tipo de conjunto obtenemos.

Consideraremos una familia cualquiera  $\mathcal{F}$  formada por campos vectoriales (locales, en número finito o infinito).

**DEFINICIÓN 4.2:** Dada una familia  $\mathcal{F}$  de campos vectoriales se llama **órbita de un punto**  $x_0$  por dicha familia al conjunto de puntos

$$\mathcal{O}(x_0) = \left\{ (\phi_{t_k}^{f_k} \circ \cdots \circ \phi_{t_1}^{f_1})(x_0) \mid k \geq 1, f_1, \dots, f_k \in \mathcal{F}, t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

Cuando sea necesario indicar la familia de campos vectoriales considerada escribiremos  $\mathcal{O}(x_0, \mathcal{F})$ .

Nótese que la relación *estar en la misma órbita* es una relación de equivalencia, por lo que por cada punto pasa una única órbita, y dos órbitas tienen un punto común si y solo si son iguales.

Recordemos que un subconjunto de  $S \subset M$  es una subvariedad regular de  $M$  de dimensión  $k$  si para cada punto  $x_0 \in S$  existe un sistema de coordenadas locales  $(x_1, \dots, x_n)$  definidas en un entorno abierto  $\mathcal{V} \subset M$  tales que los puntos de  $S$  en dicho entorno son precisamente los puntos en los que se anulan las  $n - k$  últimas coordenadas. En símbolos,

$$x \in S \cap \mathcal{V} \quad \iff \quad x_{k+1} = \cdots = x_n = 0.$$

Un subconjunto  $S \subset M$  es una subvariedad inmersa de  $M$  de dimensión  $k$  si  $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$  con  $S_1 \subset S_2 \subset \cdots \subset S_i \subset \cdots \subset S$ , donde cada  $S_i$  es una subvariedad regular de  $M$  de dimensión  $k$ .

Por otro lado, recordemos que una foliación de una variedad  $M$  es una familia  $\{S_a\}_{a \in A}$  de subvariedades inmersas en  $M$  que definen una partición de  $M$  (i.e.  $M = \bigcup_{a \in A} S_a$  y  $S_a \cap S_b = \emptyset$  si  $a \neq b$ ) con la siguiente propiedad: para cada punto  $x_0 \in M$  existe un entorno abierto  $\mathcal{V}$  de  $x_0$  en  $M$  y un sistema de coordenadas locales definido en  $\mathcal{V}$  tales que, para cada componente conexa de  $\mathcal{V} \cap S_a$  existe  $0 \leq k \leq n$  y constantes  $c_{k+1}^a, \dots, c_n^a \in \mathbb{R}$  tales que un punto  $x$  pertenece a  $\mathcal{V} \cap S_a$  si y solo si  $x_{k+1} = c_{k+1}^a, \dots, x_n = c_n^a$ . Los conjuntos  $S_a$  se denominan hojas de la foliación y su dimensión es  $k$ . Si todas las hojas tienen la misma dimensión decimos que la foliación es regular.

**TEOREMA 4.3 (Teorema de la órbita):** La órbita de un punto por una familia de campos vectoriales diferenciables es una subvariedad inmersa en  $M$ . La partición de  $M$  en órbitas es una foliación (singular, en general). Sea  $\mathcal{S}(\mathcal{F})$  la menor distribución que contiene a  $\mathcal{F}$  y que es estable por los flujos de campos en  $\mathcal{F}$ , es decir, que satisface

$D\phi_t^f(\mathcal{S}(\mathcal{F})(x)) = \mathcal{S}(\mathcal{F})(\phi_t^f(x))$  para todo  $x \in M$  y todo  $f \in \mathcal{F}$ . El espacio tangente a la órbita de  $x_0$  en cada uno de sus puntos  $x \in \mathcal{O}(x_0)$  es

$$T_x\mathcal{O}(x_0) = \mathcal{S}(\mathcal{F})(x).$$

y  $\mathcal{L}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{S}(\mathcal{F})$ . Si  $\mathcal{L}(\mathcal{F})$  es de rango constante, entonces  $\mathcal{L}(\mathcal{F}) = \mathcal{S}(\mathcal{F})$ , y la foliación por órbitas es regular. En particular, si los campos vectoriales de  $\mathcal{F}$  son analíticos (como funciones reales) se satisface la igualdad.

**COROLARIO 4.4 (Teorema de Chow-Rashevskii):** Consideremos el sistema de control

$$\dot{x} = u_1 g_1(x) + \cdots + u_m g_m(x),$$

y sea  $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_m\}$ . Supongamos que la dimensión de  $\mathcal{L}(\mathcal{G})$  es constante e igual a  $d$ , esto es,  $\dim \mathcal{L}(\mathcal{G})(x) = d$  para todo  $x \in M$ .

- Si  $d = n$ , entonces todo punto es alcanzable desde cualquier otro por medio controles constantes a trozos, es decir,

$$\mathcal{R}(x) = \mathcal{O}(x, \mathcal{G}) = M,$$

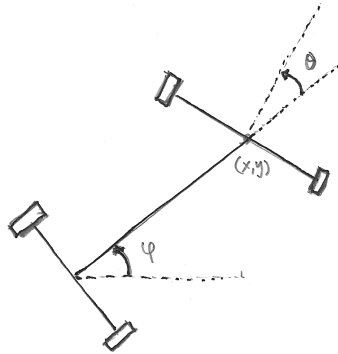
para todo  $x \in M$ .

- Si  $d < n$ , entonces la partición de  $M$  en órbitas define una foliación regular con hojas (las órbitas) de dimensión  $d$ . El conjunto de puntos alcanzables desde un punto dado es igual a la hoja a la que pertenece el punto inicial.

**EJEMPLO 4.5:** Sólido rígido con dos jets. ◀

**EJEMPLO 4.6:** Sólido rígido con un solo jet. ◀

**EJERCICIO 4.7:** Consideramos un carro como en la siguiente figura.



Las ecuaciones que describen su movimiento son

$$\begin{cases} \dot{x} = u_2 \cos(\theta + \varphi) \\ \dot{y} = u_2 \sin(\theta + \varphi) \\ \dot{\varphi} = u_2 \sin(\theta) \\ \dot{\theta} = u_1, \end{cases}$$

Sea  $\mathbf{x} = [x, y, \varphi, \theta]$  el vector formado por las variables de estado, y sean  $V = [0, 0, 0, 1]$  y  $T = [\cos(\theta + \varphi), \sin(\theta + \varphi), \sin(\theta), 0]$  los campos de control, de forma que las ecuaciones anteriores son  $\dot{\mathbf{x}} = u_1V + u_2T$ .

- Hallar los puntos de equilibrio del sistema y linealizar en torno a cada uno ellos. Comprobar que el sistema linealizado no es controlable.
- Hallar los campos vectoriales obtenidos formando los sucesivos paréntesis de Lie a partir de  $V$  y  $T$  (es decir,  $[V, T]$ ,  $[T, [V, T]]$ ,  $[V, [V, T]]$ ,  $[T, [T, [V, T]]]$ , etc.) y comprobar que el sistema anterior es controlable en cualquier punto.
- Para cada uno de los campos vectoriales hallados en el apartado anterior (incluidos  $V$  y  $T$ ) describir el tipo de movimiento que genera en el carro.

**NOTA 4.8:** El teorema de la órbita se aplica, no sólo al caso de un sistema de control lineal en los controles (en cuyo caso la familia  $\mathcal{F}$  es  $\mathcal{G}$ ), sino también a la familia  $\mathcal{F} = \{f_u\}_{u \in U}$  definida por un sistema de control general. Sin embargo, en este último caso, el conjunto de puntos alcanzables desde un punto difiere de la órbita de dicho punto, concretamente  $\mathcal{R}(x) \subseteq \mathcal{O}(x, \mathcal{F})$ . Esta última propiedad sigue siendo cierta incluso si permitimos controles que sean continuos a trozos (no necesariamente constantes en cada trozo) siempre que  $f$  sea  $C^1$ .  $\diamond$

## 5. SISTEMAS AFINES EN LOS CONTROLES

Para el caso de un sistema de control de la forma

$$\dot{x} = g_0(x) + u_1g_1(x) + \dots + u_mg_m(x)$$

el estudio de la controlabilidad es mucho más complicado. Consideraremos las familias de campos vectoriales  $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_m\}$  y  $\mathcal{F} = \{g_0, g_1, \dots, g_m\}$ , y denotaremos por  $\mathcal{O}(x_0, \mathcal{F})$  la órbita del punto  $x_0$  por la familia  $\mathcal{F}$ . Una primera propiedad es  $\mathcal{R}(x_0) \subset \mathcal{O}(x_0, \mathcal{F})$ . En efecto, al sistema anterior le asociamos el sistema de control

$$\dot{x} = u_0g_0(x) + u_1g_1(x) + \dots + u_mg_m(x)$$

que tiene un control más y que es lineal en los controles. Evidentemente, de este nuevo sistema de control solo nos interesan las trayectorias que se obtienen con  $u_0 = 1$ , por lo que tales trayectorias serán un subconjunto de las obtenidas para cualquier valor del control  $u_0$ . En consecuencia, el conjunto de puntos obtenidos con  $u_0 = 1$ , que hemos denotado por  $\mathcal{R}(x_0)$ , es un subconjunto de los obtenidos para cualquier valor de  $u_0$ , que sabemos es igual a  $\mathcal{O}(x_0, \mathcal{F})$ .

**EJEMPLO 5.1:** En general, los conjuntos anteriores son distintos. Por ejemplo, para el sistema de control

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

se tienen las trayectorias

$$x(t) = x_0 + t, \quad y(t) = y_0 + \int_0^t u(\tau) d\tau$$

con  $(x_0, y_0)$  el punto inicial. De esta manera, el conjunto de puntos alcanzables desde  $(x_0, y_0)$  es

$$\mathcal{R}(x_0, y_0) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > x_0 \},$$

es decir, el semiplano abierto a la derecha de  $x_0$ .

Por otro lado, la familia  $\mathcal{F} = \{[1, 0], [0, 1]\}$  tiene una única órbita  $\mathcal{O}(x_0, y_0) = \mathbb{R}^2$ , ya que  $\mathcal{L}(\mathcal{F})(x_0, y_0) = \mathbb{R}^2$  para todo punto  $(x_0, y_0)$ .  $\blacktriangleleft$

**EJERCICIO 5.2:** Probar que si  $g_0$  es combinación lineal de  $g_1, \dots, g_m$ , con coeficientes funciones, entonces  $\mathcal{R}(x_0) = \mathcal{O}(x_0, \mathcal{F})$  para todo punto  $x_0 \in M$ .

Recordemos que por  $\mathcal{L}(\mathcal{F})$  denotamos la menor álgebra de Lie que contiene a  $\mathcal{F}$ . Denotemos por  $\mathcal{J}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  al menor subespacio vectorial (del espacio vectorial real de los campos vectoriales en  $M$ ) que contiene a  $\mathcal{G}$  y que satisface la propiedad de invariancia

$$f_1 \in \mathcal{F}, f_2 \in \mathcal{J}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \implies [f_1, f_2] \in \mathcal{J}(\mathcal{F}, \mathcal{G}).$$

En términos de paréntesis de Lie, como ya sabemos,  $\mathcal{L}(\mathcal{F})$  está formado por todas las combinaciones lineales con coeficientes reales de campos vectoriales de la forma

$$[g_{i_k}, [g_{i_{k-1}}, \dots, [g_{i_2}, g_{i_1}] \dots]], \quad \text{para } k \in \mathbb{N}, \quad i_1, \dots, i_k \in \{0, \dots, m\},$$

mientras que  $\mathcal{J}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  está formado por todas las combinaciones lineales con coeficientes reales de campos vectoriales de la forma

$$[g_{i_k}, [g_{i_{k-1}}, \dots, [g_{i_2}, g_{i_1}] \dots]], \quad \text{para } k \in \mathbb{N}, \quad i_1, \dots, i_k \in \{0, \dots, m\}, \\ \text{con } i_1 \neq 0.$$

En términos de  $\mathcal{L}(\mathcal{F})$  y de  $\mathcal{J}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  se tiene el siguiente resultado.

**TEOREMA 5.3 (Sussmann-Jurdjevic):** Sea  $x_0$  un punto de  $M$ .

- Si  $\dim \mathcal{L}(\mathcal{F})(x_0) = n$  entonces, para cada  $T > 0$ , el conjunto  $\mathcal{R}(x_0, T)$  tiene interior no vacío. En consecuencia, el sistema de control es fuertemente accesible en  $x_0$ .
- Si  $\dim \mathcal{J}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(x_0) < n$  entonces, para cada  $T > 0$ , el conjunto  $\mathcal{R}(x_0, T)$  tiene interior vacío. En consecuencia, el sistema de control no es controlable.

**EJEMPLO 5.4:** Recordemos que la accesibilidad no implica la controlabilidad, como vimos en un ejemplo anterior. Veremos aquí otro ejemplo utilizando el teorema anterior.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^2 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Se tienen los paréntesis

$$[g_0, g_1] = 2y \frac{\partial}{\partial x} \quad [g_1, [g_0, g_1]] = 2 \frac{\partial}{\partial x}$$

por lo que  $\mathcal{J}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  tiene dimensión 2 en todo punto, y el sistema de control es accesible en todo punto.

Sin embargo, si escribimos explícitamente el sistema, resulta

$$\dot{x} = y^2, \quad \dot{y} = u.$$

Dado que  $u$  es arbitrario, a partir de  $y_0$  podemos obtener cualquier valor de  $y$ . Pero como  $\dot{x} = y^2 \geq 0$ , se tiene que  $x(t)$  es no-decreciente, por lo que partiendo de  $x_0$  tendremos  $x(t) \geq x_0$ , y el conjunto de puntos que se pueden alcanzar desde  $(x_0, y_0)$  está contenido en el semiplano a la derecha de  $x_0$ . Por tanto, el sistema dado es accesible en cualquier punto, pero no es controlable en ninguno.  $\triangleleft$

**El caso general no lineal.** En el caso de un sistema de control general  $\dot{x} = f(x, u)$  existen resultados similares a los obtenidos aquí. Para un tal sistema definimos la familia  $\mathcal{F} = \{f_u\}_{u \in U}$  y el álgebra de Lie menor que la contiene  $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ . Por otro lado, suponiendo que  $U$  tiene al menos dos puntos, definimos la familia  $\mathcal{G} = \{f_u - f_v \mid u, v \in U\}$ . A partir de ella tomamos el menor subespacio  $\mathcal{J}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  que contiene a  $\mathcal{G}$  y cumple la propiedad de invarianza: si  $f_1 \in \mathcal{F}$  y  $g \in \mathcal{J}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  entonces  $[f_1, g] \in \mathcal{J}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ . Estas álgebras de Lie pueden hallarse por medio de paréntesis de Lie, de manera análoga a la del caso afín en los controles. El teorema 5.3 sigue siendo válido para esta clase más general de sistemas.

## REFERENCIAS

- [1] A. ISIDORI: *Nonlinear Control Systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [2] P. HARTMAN: *Ordinary differential equations*, Birkhäuser, Boston, 1982.
- [3] B. JAKUBCZYK: *Introduction to Geometric Nonlinear Control; Controllability and Lie Bracket*, Lectures given at the Summer School on Mathematical Control Theory, Trieste 3-28 September 2001.

EDUARDO MARTÍNEZ: IUMA AND DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA, FACULTAD DE CIENCIAS, UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA, 50009 ZARAGOZA, SPAIN

*E-mail address:* emf@unizar.es