CONTROL ÓPTIMO: TIEMPO CONTINUO

EDUARDO MARTÍNEZ

Los problemas de control óptimo para sistemas en tiempo continuo son similares a los que estudiamos para sistemas de control en tiempo discreto. El sistema a controlar viene, ahora, descrito por una ecuación diferencial $\dot{x} = f(t, x, u)$, en vez de una ecuación en diferencias, y la función de coste que queremos optimizar, está definida por una suma continua, es decir, por una integral. Como de costumbre, supondremos que las variables de estado x toman valores en un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y las variables de control toman valores en un subconjunto de $\mathbb{R}^m$. Se supondrá que la función f es diferenciable, de manera que todo problema de valor inicial tiene solución local única. La función de coste será del tipo $\phi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, u)\, dt$, donde L es una función real diferenciable en un conjunto adecuado de $\mathbb{R}^{n+m+1}$ y ϕ es una función real definida en un conjunto de $\mathbb{R}^n$.

Para cada estado inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y cada función $\omega\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^m$ consideramos la solución $x = \gamma(t)$ del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \omega(t)) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

(que suponemos definida en el intervalo $[t_0, t_1]$) que nos proporciona la evolución del estado del sistema al aplicar el control $u = \omega(t)$. A partir de ella definimos el funcional de coste

$$\mathcal{J}(\omega) = \phi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L(t, \gamma(t), \omega(t))\, dt.$$

Buscamos minimizar el valor de $\mathcal{J}(u)$ entre todas las funciones de control admisibles u definidas en $[t_0, t_1]$, o en otras palabras, buscamos el mínimo del conjunto $\{\, \mathcal{J}(u) \mid u\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^m \text{ admisible} \,\}$.

Simbólicamente escribiremos simplemente

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad && \phi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t))\, dt \\ &\text{sujeto a} && \dot{x} = f(t, x, u) \\ & && x(t_0) = x_0. \end{aligned}$$

Al igual que en el caso discreto, utilizaremos por un lado el principio de optimalizad de Bellman y por otro el principio del máximo de Pontryagin.

1. Programación dinámica

Para cada $\tau \in [t_0, t_1]$, cada $\xi \in \mathbb{R}^n$ y cada función admisible $u\colon [\tau, t_1] \to \mathbb{R}^m$, definimos el 'valor óptimo hasta el final' (optimal-cost-to-go) como el valor mínimo $V(\tau, \xi)$ del problema

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad && \mathcal{J}(\tau, \xi, u) = \phi(x(t_1)) + \int_{\tau}^{t_1} L(t, x(t), u(t))\, dt \\ &\text{sujeto a} && \dot{x} = f(t, x, u) \\ & && x(\tau) = \xi. \end{aligned}$$

De esta manera, nuestro funcional original es $\mathcal{J}(u) = \mathcal{J}(t_0, x_0, u)$ y tiene valor mínimo $V(t_0, x_0)$. En particular, para $\tau = t_1$, nótese que $V(t_1, x) = \phi(x)$, ya que $\mathcal{J}(t_1, x, u) = \phi(x(t_1)) = \phi(x)$ no depende de u.

Lema 1.1: *Para cada pareja de tiempos $\tau_0 < \tau_1$ en el intervalo $[t_0, t_1]$, la función valor óptimo $V(t, x)$ satisface la relación*

$$V(\tau_0, x(\tau_0)) = \min_{u\colon [\tau_0,\tau_1]\to\mathbb{R}^m} \left[V(\tau_1, x(\tau_1)) + \int_{\tau_0}^{\tau_1} L(t, x(t), u(t))\, dt \right].$$

La demostración se propone como ejercicio.

De este resultado se deduce que

$$0 = \min_{u\colon [\tau_0,\tau_1]\to\mathbb{R}^m} \left[[V(\tau_1, x(\tau_1)) - V(\tau_0, x(\tau_0))] + \int_{\tau_0}^{\tau_1} L(t, x(t), u(t))\, dt \right],$$

y suponiendo que $V(t, x(t))$ sea derivable llegamos a

$$0 = \min_{u\colon [\tau_0,\tau_1]\to\mathbb{R}^m} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[\frac{d}{dt} V(t, x(t)) + L(t, x(t), u(t)) \right] dt.$$

Haciendo que la longitud del intervalo $[\tau_0, \tau_1]$ sea arbitrariamente pequeña, y asumiendo que la función u toma un valor aproximadamente constante, podemos suponer que

$$0 = \min_{u\in\mathbb{R}^m} \left[\frac{d}{dt} V(t, x(t)) + L(t, x(t), u(t)) \right].$$

Más aún, teniendo en cuenta que $x(t)$ es solución de la ecuación $\dot{x} = f(t, x, u)$, tenemos que

$$\frac{d}{dt} V(t, x(t)) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial V}{\partial x}(t, x(t)) \cdot f(t, x(t), u(t)),$$

y por tanto

$$0 = \min_{u\in\mathbb{R}^m} \left[\frac{\partial V}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial V}{\partial x}(t, x(t)) \cdot f(t, x(t), u(t)) + L(t, x(t), u(t)) \right].$$

Aunque los argumentos utilizados para llegar hasta aquí son de dudosa validez, ésta ecuación será nuestro punto de partida, a partir del cual seremos capaces de dar un conjunto de condiciones suficientes.

Teorema 1.2: *Supongamos que $V\colon [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función con derivadas parciales continuas que satisface la **ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman***

$$0 = \min_{u\in\mathbb{R}^m} \left[\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial V}{\partial x}(t, x) \cdot f(t, x, u) + L(t, x, u) \right] \tag{HJB}$$

con la condición final

$$V(t_1, x) = \phi(x).$$

Supongamos que, para cada $t \in \mathbb{R}$ y cada $x \in \mathbb{R}^n$, el mínimo en la ecuación anterior se obtiene en un único punto $u = h(t, x)$, y denotemos por $x^*(t)$ la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, h(t, x)) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

y $u^*(t) = h(t, x^*(t))$. Entonces u^* es el control óptimo, x^* es la trayectoria optimal y $V(t_0, x_0)$ es el valor óptimo de $\mathcal{J}(x_0, u)$.

Dem. Sea $u = \omega(t)$ cualquier función de control admisible y sea $x = \gamma(t)$ la trayectoria asociada, con condición inicial $x(t_0) = x_0$. De la ecuación (HJB) se deduce

$$0 \leq \frac{\partial V}{\partial t}(t, \gamma(t)) + \frac{\partial V}{\partial x}(t, \gamma(t)) \cdot f(t, \gamma(t), \omega(t)) + L(t, \gamma(t), \omega(t)).$$

Por tanto,

$$0 \le \frac{d}{dt}[V(t,\gamma(t))] + L(t,\gamma(t),\omega(t)),$$

e integrando en el intervalo $[t_0,t_1]$ obtenemos

$$0 \le V(t_1,\gamma(t_1)) - V(t_0,\gamma(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} L(t,\gamma(t),\omega(t)).$$

Teniendo en cuenta la condición final $V(t_1,x) = \phi(x)$, y que $\gamma(t_0) = x_0$ obtenemos

$$V(t_0,x_0) = V(t_0,\gamma(t_0)) \le \phi(\gamma(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L(t,\gamma(t),\omega(t)).$$

Para el control $u^*(t)$ y la trayectoria asociada $x^*(t)$, se obtiene el mínimo (el que aparece en HJB), por lo que la desigualdad anterior se convierte en igualdad, y así

$$V(t_0,x_0) = \phi(x^*(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L(t,x^*(t),u^*(t)).$$

De ambas expresiones se deduce que

$$\phi(x^*(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L(t,x^*(t),u^*(t)) \le \phi(\gamma(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L(t,\gamma(t),\omega(t)),$$

o en otras palabras,

$$\mathcal{J}(u^*) \le \mathcal{J}(\omega)$$

para todo control admisible ω, por lo que en u^* se obtiene el mínimo del funcional $\mathcal{J}$ y u^* es el control óptimo. De aquí, x^* es la trayectoria optima y $V(t_0,x_0) = \mathcal{J}(u^*)$ es el valor óptimo. □

Ejemplo 1.3 (Problemas LQ): Un tipo de problemas de control óptimo que aparece muy frecuentemente es el de los problemas LQ, que consisten en un sistema de control lineal (L) y una función de coste cuadrática (Q).

Concretamente, consideremos el sistema de control en $\mathbb{R}^n$

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

con $u \in \mathbb{R}^m$, y para $T > 0$ fijo, nos planteamos el problema de minimizar el funcional

$$\frac{1}{2}\int_0^T (x^\mathsf{T} Q x + u^\mathsf{T} R u)\, dt,$$

entre las trayectorias del sistema que comienzan en $x(0) = x_0$, sin restricción alguna en el punto final. Supondremos que $Q \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ y $R \in \mathbb{R}^{(m,m)}$ son matrices simétricas con R definida positiva.

Consideremos la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman, que en este caso es

$$\min_{u\in\mathbb{R}^m} \left\{ \frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial V}{\partial x}\cdot(Ax+Bu) + \frac{1}{2}(x^\mathsf{T} Q x + u^\mathsf{T} R u) \right\} = 0.$$

con la condición final $V(T,x) = 0$.

Para resolver esta ecuación analíticamente debemos tener alguna intuición sobre la forma de la solución. Teniendo en cuenta que todas las funciones que aparecen en la teoría son cuadráticas, podemos suponer que la solución es también una función cuadrática. Este hecho está avalado por los resultados que obtuvimos para sistemas en tiempo discreto.

En efecto, supongamos que $V(t,x)$ es de la forma

$$V(t,x) = \frac{1}{2}x^\mathsf{T} P(t) x,$$

para alguna función matricial simétrica $P(t)$ a determinar. Sustituyendo en la ecuación de HJB obtenemos

$$\min_{u\in\mathbb{R}^m}\left\{\frac{1}{2}x^\top\dot{P}(t)x + x^\top P(t)(Ax+Bu) + \frac{1}{2}(x^\top Qx + u^\top Ru)\right\} = 0.$$

Buscamos por tanto el punto donde se minimiza la función

$$x^\top P(t)^\top Bu + \frac{1}{2}u^\top Ru$$

con respecto a u (el resto de los términos no depende de u). Derivando con respecto a u obtenemos

$$B^\top P(t)x + Ru = 0,$$

por lo que el mínimo se obtiene en el punto $u = -R^{-1}B^\top P(t)x$. Sustituyendo en la ecuación de HJB obtenemos

$$\frac{1}{2}x^\top\dot{P}(t)x + x^\top P(t)(Ax - BR^{-1}B^\top P(t)x) + \frac{1}{2}(x^\top Qx + x^\top P(t)BR^{-1}B^\top P(t)x) = 0$$

Simetrizando y simplificando obtenemos que $V(t,x) = \frac{1}{2}x^\top P(t)x$ es solución de la ecuación de HJB si y solo si la matriz P satisface la ecuación diferencial

$$\dot{P} - PBR^{-1}B^\top P + PA + A^\top P + Q = 0,$$

que se conoce con el nombre de ***ecuación diferencial matricial de Riccati***. Además, teniendo en cuenta que el valor final debe ser $V(T,x) = 0$, se deduce que P debe tener como valor final

$$P(T) = 0.$$

Con esta condición, existe una única solución (puede demostrarse su existencia global) para la matriz $P(t)$, y hemos encontrado una solución de la ecuación de HJB.

Una vez resuelta la ecuación diferencial de Riccati, según el teorema anterior, la trayectoria óptima $x^*(t)$ es la solución del problema de valor inicial

$$\dot{x} = [A - BR^{-1}B^\top P(t)]x, \qquad x(0) = x_0.$$

El valor del control óptimo puede, finalmente, obtenerse de

$$u^*(t) = -R^{-1}B^\top P(t)x^*(t).$$

Nótese que la función matricial P es independientemente del valor de x_0, y puede pre-calcularse. Por tanto, la solución obtenida proporciona una estrategia de control por realimentación. $\triangleleft$

La ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman se puede expresar convenientemente en términos del ***Hamiltoniano de Pontryagin***

$$H^1(t,x,p,u) = p^\top f(t,x,u) - L(t,x,u),$$

sin más que poner $p = -\frac{\partial V}{\partial x}$. Explícitamente, dicha ecuación queda

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) = \max_u H^1\Big(t, x, -\frac{\partial V}{\partial x}(t,x), u\Big). \tag{HJB}$$

Según se deduce del teorema anterior, siempre que los datos sean suficientemente regulares, para resolver un problema de control óptimo mediante programación dinámica podemos proceder como sigue:

1. Definir el Hamiltoniano $H^1(t,x,p,u) = p^\top f(t,x,u) - L(t,x,u)$.
2. Optimizar punto a punto con respecto a la variable u para obtener
$$U(t,x,p) = \arg\max_u H^1(t,x,p,u).$$
3. Hallar el valor óptimo del Hamiltoniano
$$H^*(t,x,p) = H^1(t,x,p,U(t,x,p)).$$

4. Resolver la ecuación en derivadas parciales
$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) = H^*\Big(t, x, -\frac{\partial V}{\partial x}(t,x)\Big)$$
con la condición final $V(t_1, x) = \phi(x)$.

De esta manera, el feedback óptimo es
$$u = h(t,x) = U\Big(t, x, -\frac{\partial V}{\partial x}(t,x)\Big),$$
la trayectoria óptima x^* se obtiene resolviendo el problema de valor inicial
$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, h(t,x)) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$
y el control óptimo es $u^*(t) = h(t, x^*(t))$.

EJERCICIO 1.4: Comprobar que el procedimiento anterior nos lleva a la solución del problema LQ, obteniendo paso a paso los mismos resultados que en la solución que hemos dado anteriormente.

2. El principio del máximo de Pontryagin

Fijados dos tiempos $t_0 < t_1$ y dos estados $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, consideremos el funcional a minimizar
$$\mathcal{J}(u) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t))\, dt,$$
definido en el conjunto de trayectorias $x(t)$ del sistema de control que conectan dichos estados, es decir, tales que $x(t_0) = x_0$ y $x(t_1) = x_1$. Nótese que, a diferencia de lo que hicimos anteriormente, ahora fijamos tanto el punto inicial como el punto final de la trayectoria. Más adelante estudiaremos otros casos.

El principio del máximo de Pontryagin establece un conjunto de condiciones necesarias para que una curva sea la solución de nuestro problema de control óptimo. Se expresa de forma sencilla en términos del Hamiltoniano de Pontryagin
$$H(x, p, \lambda, u) = p^{\mathsf{T}} f(x,u) - \lambda L(x,u),$$
donde λ es una constante. Nótese que el Hamiltoniano H^1 utilizado en la sección anterior se obtiene para $\lambda = 1$, es decir, $H^1(t, x, p, u) = H(t, x, p, 1, u)$.

TEOREMA 2.1 (***Principio del máximo de Pontryagin***): *Consideremos un sistema de control óptimo, y sean $u = u^*(t)$ el control óptimo y $x = x^*(t)$ la correspondiente trayectoria óptima del sistema. Existen una constante $\lambda^* \geq 0$, una función absolutamente continua $p^* \colon [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ tales que $(\lambda^*, p^*(t)) \neq (0, 0)$, para todo $t \in [t_0, t_1]$, y satisfaciendo*

1. *La curva $p = p^*(t)$ satisface la ecuación diferencial*
$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x^*(t), p, \lambda, u^*(t)),$$
para casi todo $t \in [t_0, t_1]$.
2. *El control $u = u^*(t)$ maximiza el Hamiltoniano, es decir,*
$$u^*(t) = \arg\max_u H(t, x^*(t), p^*(t), \lambda^*, u),$$
para casi todo $t \in [t_0, t_1]$.
3. *La variación del valor óptimo del Hamiltoniano es*
$$\frac{d}{dt}[H(t, x^*(t), p^*(t), \lambda^*, u^*(t))] = \frac{\partial H}{\partial t}(t, x^*(t), p^*(t), \lambda^*, u^*(t)).$$

En particular, si tanto L como f no dependen explícitamente de la variable t, el Hamiltoniano (que tampoco depende explícitamente de t) es constante a lo largo de dicha solución

$$H(x^*(t), p^*(t), \lambda^*, u^*(t)) = \textit{constante}.$$

La demostración de este resultado puede encontrarse en el libro de Pontryagin [?].

NOTA 2.2: La pareja (p^*, λ^*) está definida salvo un factor multiplicativo constante. En efecto, si $(x^*(t), p^*(t), \lambda^*, u^*(t))$ es una solución óptima junto con sus correspondientes multiplicadores, entonces también lo es $(x^*(t), \alpha p^*(t), \alpha\lambda^*, u^*(t))$, cualquiera que sea la constante $\alpha \neq 0$. Por tanto, podemos limitarnos a considerar los casos $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$. Los extremales $(x^*(t), u^*(t))$ a los que corresponden soluciones con $\lambda^* = 1$ se llaman ***extremales normales***, mientras que los que corresponden a soluciones con $\lambda^* = 0$ se denominan ***extremales anormales***. Nótese que pueden existir extremales que sean a la vez normales y anormales. ◇

NOTA 2.3: Las ecuaciones diferenciales que satisfacen las curvas $x = x^*(t)$ y $p = p^*(t)$ pueden ambas expresarse en términos del Hamiltoniano,

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad \text{y} \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

o más explícitamente

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p}(t, x, p, \lambda, u) \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial p}(t, x, p, \lambda, u) \end{aligned}$$

◇

NOTA 2.4: Si el conjunto $\mathcal{U}$ donde toman valores los controles es un abierto, entonces la condición de maximización implica que $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$, es decir,

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), p^*(t), \lambda^*, u^*(t)) = 0,$$

para casi todo $t \in [t_0, t_1]$.

Las ecuaciones

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \qquad \text{and} \qquad 0 = \frac{\partial H}{\partial u},$$

se denominan ***ecuaciones críticas***, y a sus soluciones curvas críticas. Evidentemente (siempre que $\mathcal{U}$ sea un abierto) las trayectorias optimales corresponden a curvas críticas. ◇

EJEMPLO 2.5 (Camino más corto): Consideramos el problema de encontrar las curvas que unen dos puntos dados del plano (t_0, x_0) y (t_1, x_1) minimizando la longitud de dicha curva. Dado que la longitud de la curva parametrizada en la forma $x(t)$ es $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \dot{x}^2}\, dt$, podemos tomar como control la derivada $\dot{x} = u$, de forma que nuestro problema se transforma en un problema de control óptimo, donde el sistema de control es

$$\dot{x} = u,$$

la función L es

$$L(t, x, u) = \sqrt{1 + u^2},$$

y los valores extremos son $x(t_0) = x_0$ y $x(t_1) = x_1$.

El Hamiltoniano es

$$H(t, x, p, u) = pu - \lambda\sqrt{1 + u^2}.$$

Las ecuaciones que se obtiene son
$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = p - \lambda \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$$
que nos da el valor de p en función de u (o viceversa). Para $\lambda = 0$ esta ecuación impone $p = 0$, por lo que no hay soluciones anormales. Para las soluciones normales, tomamos $\lambda = 1$ y así
$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0,$$
por lo que p es una constante. Como consecuencia de $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ obtenemos que u es constante. Finalmente, de la ecuación $\dot{x} = u$ se llega a $x = mt + n$ donde las constantes m y n se obtienen en función de los valores en los extremos
$$m = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} \qquad n = x_0 - t_0 \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}.$$
En consecuencia
$$x(t) = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}(t - t_0) + x_0,$$
que es la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados, como todo el mundo habrá adivinado. ◁

Ejemplo 2.6 (Problema isoperimétrico): Con una cuerda de longitud ℓ pretendemos unir dos puntos (previamente fijados) de manera que aislemos la mayor superficie posible (entre la cuerda y la recta que une los puntos dados).

Sean $(0,0)$ y $(T,0)$ los puntos dados, y denotemos por $x(t)$ la ecuación de la cuerda. Debemos maximizar $\int_0^T x(t)\,dt$ con la restricción $\ell = \int_0^T \sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt$. Para reformular el problema como uno de control óptimo, tomemos la velocidad $\dot{x} = u$ como control, y para relajar la ligadura definimos la variable y satisfaciendo $\dot{y} = \sqrt{1+u^2}$ junto con $y(0) = 0$. Entonces $y(T) = y(0) + \int_0^T \sqrt{1+u^2}\,dt = 0 + \ell$ nos fija el valor final de y. En resumen, hemos reformulado nuestro problema en la forma
$$\begin{aligned}
&\text{minimizar} && \int_0^T -x(t)\,dt \\
&\text{sujeto a} && \dot{x} = u \\
& && \dot{y} = \sqrt{1+u^2} \\
& && (x,y)(0) = (0,0) \\
& && (x,y)(T) = (0,\ell).
\end{aligned}$$

La función Hamiltoniano de Pontryagin es
$$H = p_x u + p_y \sqrt{1+u^2} + \lambda x$$
de donde la condición de optimalizad resulta
$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = p_x + p_y \frac{u}{\sqrt{1+u^2}},$$
y las ecuaciones de evolución de las variables p son
$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda$$
$$\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0$$

Para las soluciones anormales tenemos $\lambda = 0$, por lo que p_x y p_y son ambos constantes. Si $p_y = 0$ entonces (por la condición de optimalidad) $p_x = 0$ que implica $(\lambda, p_x, p_y) = (0,0,0)$. Por contra, si $p_y \neq 0$ y dividiendo por p_y en la condición de optimalizad obtenemos que $u/\sqrt{1+u^2}$ = constante. Siguiendo los pasos del problema anterior, obtenemos que u es constante, e imponiendo las condiciones de contorno llegamos a $x(t) = 0$ para todo $t \in [0, T]$. Esta solución proporciona un mínimo del área, por lo que debe desecharse.

Para las soluciones normales, tenemos $\lambda = 1$, por lo que $p_x = c - t$ mientras que $p_y = b$, constante. Despejando u e integrando se obtiene finalmente

$$x^2 + (t - T/2)^2 = (T/2)^2$$

que es una semicircunferencia. Su longitud es $\ell = \pi(T/2)$, de donde $T = 2\ell/\pi$.

Para integrar la ecuación implícita, parametrizamos con (φ, ξ) en la forma

$$c - t = \sin\varphi \qquad \dot{x} = \tan\varphi \qquad x = \xi$$

(la segunda sale de $u/\sqrt{1-u^2} = t - c$). Sustituyendo en $dx - \dot{x}dt = 0$ obtenemos $d\xi = (cte)\sin\varphi\, d\varphi$, de donde $c - t = \sin\varphi$, $x - d = \cos\varphi$, de donde $(x-a)^2 + (t-c)^2 = cte$. ◁

La presencia del multiplicador λ complica los cálculos y en muchas ocasiones no produce soluciones. En el ejemplo anterior, hemos obtenido una solución anormal que resultó no ser óptima. Sin embargo, existen sistemas sencillos en los que se ve que su presencia es necesaria. En el siguiente ejemplo aparece una solución anormal que resulta ser óptima.

Ejemplo 2.7 (Soluciones anormales): Consideremos el sistema de control óptimo en $\mathbb{R}$ consistente en minimizar el funcional $\int_0^1 u(t)\, dt$ sobre el conjunto de trayectorias del sistema $\dot{x} = u^2$ que empiezan y terminan en el origen, es decir, $x(0) = x(1) = 0$.

La solución es fácil de obtener. Integrando $\dot{x} = u^2$ en $[0, 1]$ obtenemos $x(1) - x(0) = \int_0^1 u^2(t)\, dt$, y como $x(0) = x(1) = 0$ obtenemos $\int_0^1 u^2(t)\, dt = 0$, es decir, $u(t) = 0$ para casi todo $t \in [0, 1]$. Por tanto, $\int_0^1 u(t)\, dt = 0$ es el valor mínimo que se obtiene para $x(t) = 0$ (constante) y $u(t) = 0$.

Intentemos ahora obtenerla por medio del principio del máximo de Pontryagin. Si sólo consideramos las soluciones normales $\lambda = 1$, tenemos que $H = pu^2 - u$, por lo que las ecuaciones de Hamilton-Pontryagin son

$$0 = 2pu - 1 = 0 \qquad \dot{p} = 0 \qquad \text{y} \qquad \dot{x} = u^2,$$

cuya solución general es

$$p = \text{constante}, \qquad u = \frac{1}{2p} \qquad \text{y} \qquad x(t) = c + \frac{1}{4p^2}t,$$

con $c \in \mathbb{R}$. Imponiendo que $x(0) = 0$ obtenemos que $c = 0$. Ahora, imponiendo $x(1) = 0$ obtenemos $1/(4p^2) = 0$, que no es posible. En consecuencia, no existe ninguna solución normal.

Buscamos ahora las soluciones anormales. El Hamiltoniano es $H = pu^2$, por lo que las ecuaciones de Hamilton-Pontryagin son

$$0 = 2pu = 0, \qquad \dot{p} = 0 \qquad \text{y} \qquad \dot{x} = u^2.$$

Se deduce que p es constante, y como $\lambda = 0$, p debe ser no nulo, $p \neq 0$, por lo que $u = 0$ y $x(t) = c$. Imponiendo $x(0) = 0$ se tiene $x(t) = 0$, que cumple también $x(1) = 0$.

En consecuencia, el principio del máximo sólo selecciona la trayectoria $x(t) = 0$, siendo esta una solución anormal. ◁

Condiciones de transversalidad. Cuando no fijamos algunos de los valores inicial o final de las variables de estado, o introducimos un coste terminal, entonces se deben verificar condiciones adicionales que nos permiten resolver el problema. Veamos algunas de ellas.

Punto final libre y coste terminal. Como ya hicimos en el caso de la programación dinámica, en ocasiones se añade al funcional de coste una penalización terminal $\phi(t_1, x(t_1))$, es decir, el objetivo a minimizar es

$$\phi(t_1, x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t))\, dt,$$

dejando libre el punto final. En este caso, además de las condiciones expresadas en el principio del máximo, el valor final de p queda fijado por la condición

$$p(t_1) = -\lambda \frac{\partial \phi}{\partial x}(t_1, x(t_1)).$$

Ligadura inicial. Si en vez de fijar el punto inicial, se da una ligadura que debe satisfacer dicho punto, $\psi(x(t_0)) = 0$, entonces el valor inicial de p debe satisfacer la condición de transversalidad

$$p(t_0) = \mu^\mathsf{T} \frac{\partial \psi}{\partial x}(x(t_0)),$$

con μ a determinar. En particular, si el punto inicial es completamente libre, entonces $p(t_0) = 0$.
Ligadura final. Si en vez de fijar el punto final, se da una ligadura que debe satisfacer dicho punto, $\psi(x(t_1)) = 0$, entonces el valor final de p debe satisfacer la condición de transversalidad

$$p(t_1) = \mu^\mathsf{T} \frac{\partial \psi}{\partial x}(x(t_1)),$$

con μ a determinar. En particular, si el punto final es completamente libre, entonces $p(t_1) = 0$.

Si además se da un coste terminal, entonces

$$p(t_1) = \mu^\mathsf{T} \frac{\partial \psi}{\partial x}(x(t_1)) - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x}(t_1, x(t_1)).$$

Tiempo final libre. Si el tiempo final t_1 no está fijado previamente, sino que es uno de los valores que deben determinarse (es decir, no lo fijamos de antemano, sino que buscamos aquel que hace que nuestro funcional tome el menor valor posible), entonces se satisface la condición adicional

$$H(t_1, x^*(t_1), p^*(t_1), \lambda^*, u^*(t_1)) = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial t}(t_1, x^*(t_1)).$$

Si además el problema es autónomo, esto es, tanto f como L y ϕ no dependen explícitamente de t, entonces, como el valor del Hamiltoniano es constante a lo largo de cada solución optimal, dicho valor debe ser nulo

$$H(x^*(t), p^*(t), \lambda^*, u^*(t)) = 0 \quad \text{para todo } t \in [t_0, t_1].$$

Esta situación ocurre, por ejemplo en los problemas de tiempo mínimo.

Nótese que en el problema isoperimétrico, ya teníamos esta situación, aunque, debido a la simplicidad del problema, pudimos resolverlo sin imponer la anulación del Hamiltoniano.

Ejemplo 2.8 (Acelerar-frenar en tiempo mínimo): Consideremos un sistema de control descrito por las ecuaciones

$$\ddot{x} = u \qquad |u| \leq 1$$

que describe un carro colocado en unos railes, sobre el que se actúa con una fuerza u. Pretendemos llevar el carro desde $x = 0$ partiendo del reposo hasta el punto $x = 1$, llegando también en reposo, y queremos hacerlo en el menor tiempo posible.

El sistema de control escrito en la forma habitual como sistema de primer orden es

$$\dot{x} = y \qquad \dot{y} = u$$

y el funcional a minimizar es

$$J = T = \int_0^T 1\,dt,$$

siendo T libre, y con condiciones de contorno $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $x(T) = 1$, $y(T) = 0$.

[$\lambda = 1$] El Hamiltoniano es $H = p_1 y + p_2 u - 1$ que alcanza el máximo en $u = \pm 1$, siendo el signo de u el mismo que el de p_2. Las ecuaciones diferenciales para p son

$$\dot{p}_1 = 0 \qquad \dot{p}_2 = -p_1,$$

de forma que p_1 es constante y p_2 afín en t. Así x es un polinomio de segundo grado a trozos, mientras que y es lineal a trozos. Es fácil convencerse de que para obtener el punto deseado, el valor de u debe ser positivo al principio y negativo al final, por lo que la solución será de la forma $u(t) = 1$ para $t < \tau$ y $u(t) = -1$ para $t > \tau$, siendo τ el punto donde se anula p_2 (que por tanto es $p_2 = \beta(t - \tau)$ con $\beta > 0$).

De la anulación del Hamiltoniano obtenemos $\beta|t - \tau| = 1 + \beta y$. En $t = 0$, se tiene $\beta\tau = 1$, y en $t = T$ se tiene $\beta(T - \tau) = 1$, de donde $\tau = T/2$ (como era de esperar). Por tanto $y(t) = |t - T/2| - T/2$, $u(t) = \operatorname{sgn}(T/2 - t)$ y $x(t) = t^2/2$ para $t < T/2$ y $x(t) = T^2/8 + tT/2 - t^2/2$ para $t > T/2$. Finalmente, para que $x(T) = 1$ se debe cumplir que $T^2/8 = 1$, de donde $T = 1/\sqrt{8}$ es el tiempo mínimo.

En consecuencia, la estrategia óptima consiste en acelerar al máximo hasta la mitad del recorrido y luego frenar al máximo a partir de este punto, y tardamos un tiempo $T = 1/(2\sqrt{2})$. ◁

Ejemplo 2.9 (Problema de Zermelo): El movimiento de un barco que se desplaza a velocidad constante sobre un río se modeliza por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v\cos u + c(y) \\ \dot{y} &= v\sin u, \end{aligned}$$

donde $c(y)$ es la velocidad de la corriente del río, y u es el ángulo formado por el barco con la dirección del río, siendo este el único control que tenemos sobre la nave. Partiendo del punto $(x(0), y(0)) = (0, 0)$ queremos cruzar al otro lado en tiempo mínimo. Se tiene que el tiempo final es libre, y además tenemos la ligadura de que el punto final esté en al orilla contraria, es decir, $y(T) = L$, siendo L la anchura del río.

Estudiaremos los extremales normales. El Hamiltoniano es

$$H(t, x, p, 1, u) = p_x(v\cos(u) + c(y)) + p_y v\sin(u) - 1$$

La condición $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ impone

$$-p_x v\sin(u) + p_y v\cos(u) = 0,$$

de donde se deduce que $p_y = p_x\tan(u)$.

Como el tiempo final es libre y el problema es autónomo, el valor del Hamiltoniano en la trayectoria óptima es nulo

$$p_x(v\cos(u) + c(y)) + p_y v\sin(u) = 1,$$

por lo que

$$\cos(u) = \frac{p_x v}{1 - p_x c(y)}.$$

Las ecuaciones para las variables p son

$$\dot{p}_x = 0, \qquad \dot{p}_y = -c'(y)p_x$$

con el valor final $p_y(T) = 0$. Por tanto, p_x es constante, y debe ser no nulo, ya que si $p_x = 0$ entonces $p_y = 0$, $\cos(u) = 0$, $\sin(u) = \pm 1$ y el barco nunca llega a la orilla contraria. El valor de p_y puede encontrarse en términos de $c'(y)$ integrando con valor final $p(T) = 0$. Finalmente se deben integrar las ecuaciones de movimiento, con el valor dado de u, imponiendo que $y(T) = L$, lo que fija el valor de p_x y de T.

Por ejemplo, si la corriente del río $c(y)$ es constante $c(y) = c_0$, entonces debemos mantener el timón formando ángulo constante

$$\cos(u) = \frac{p_x v}{1 - p_x c_0}.$$

El valor de p_y es constante, y por tanto es nulo. Integrando la ecuación para y con $y(0) = 0$ obtenemos $y(t) = tv\sin(u)$ e imponiendo $y(T) = L$ se llega a $T = L/(v\sin(u))$.

Como ejercicio, comprobar que no existen extremales anormales.

◁

Ejemplo 2.10 (Problemas LQ): Consideremos de nuevo un problema de tipo LQ, como en el ejemplo 1.3. El sistema de control es

$$\dot{x} = Ax + Bu.$$

Para $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $T > 0$ fijos, nos planteamos el problema de minimizar el funcional

$$\frac{1}{2}\int_0^T (x^\top Qx + u^\top Ru)\,dt,$$

entre las trayectorias del sistema que comienzan en $x(0) = x_0$, sin restricción alguna en el punto final. Supondremos que $Q \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ y $R \in \mathbb{R}^{(m,m)}$ son matrices simétricas con R definida positiva. Además supondremos que no hay controles redundantes, es decir, que $B \in \mathbb{R}^{(n,m)}$ tiene rango máximo $m \leq n$.

Probaremos que la trayectoria optimal se obtiene como la solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BR^{-1}B^\top p \\ \dot{p} = Qx - A^\top p, \end{cases}$$

con condiciones de frontera

$$x(0) = x_0, \quad p(T) = 0,$$

y estando el control óptimo dado por

$$u = R^{-1}B^\top p.$$

En efecto, estudiaremos primero las soluciones normales, con $\lambda = 1$. El Hamiltoniano de Pontryagin es

$$H(x, p, \lambda, u) = p^\top(Ax + Bu) - \frac{1}{2}(x^\top Qx + u^\top Ru).$$

Siendo R definida positiva, el Hamiltoniano sólo tiene un máximo, que se obtiene en el punto donde la derivada parcial con respecto a u se anula, esto es, donde $B^\top p = Ru$, de donde obtenemos

$$u = R^{-1}B^\top p.$$

Así, sustituyendo la expresión anterior en la ecuación de control obtenemos

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax + BR^{-1}B^\top p.$$

Por otro lado, calculando la derivada parcial con respecto a x, obtenemos

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = Qx - A^\top p.$$

Como el punto final es libre, se tiene además que $p(T) = 0$. Recordemos también que el punto inicial está dado $x(0) = x_0$.

Por último, notemos que no hay soluciones anormales. Dado que el punto final es libre, tenemos que $p(T) = 0$, por lo que para que se satisfaga $(\lambda, p(T)) \neq (0,0)$ debe ser $\lambda \neq 0$. $\triangleleft$

EJERCICIO 2.11: Generalizar el resultado anterior para la siguiente función de coste

$$\frac{1}{2}\int_0^T (x^\top Q x + u^\top R u + 2u^\top S x)\, dt,$$

Nótese que este problema se relaciona con el anterior mediante una transformación de feedback $u = \bar{u} - Fx$, de donde se puede obtener fácilmente el resultado.

Relación con la programación dinámica. Comparando la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman escrita en términos del Hamiltoniano, con las condiciones expresadas en el principio de Pontryagin, se deduce que la relación entre ambos métodos debe venir dada por medio de

$$p(t) = -\frac{\partial V}{\partial x}(t, x(t)).$$

Veamos que, bajo condiciones adecuadas de regularidad de las funciones que han ido apareciendo, esto es cierto.

TEOREMA 2.12: *Supongamos que la solución $V(t,x)$ de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman tiene derivadas parciales segundas continuas, y que $h(t,x)$ es diferenciable. Sea $(x^*(t), u^*(t))$ la trayectoria y control óptimos, y definamos*

$$p^*(t) = -\frac{\partial V}{\partial x}(t, x^*(t)).$$

Entonces (x^*_t, p^*_t, u^*_t) satisface las ecuaciones de Hamilton-Pontryagin (PMP) *con* $\lambda^* = 1$.

DEM. En primer lugar, es obvio que

$$\dot{x}^*(t) = f(t, x^*(t), u^*(t)) = \frac{\partial H^1}{\partial p}(t, x^*(t), p^*(t), u^*(t)).$$

Sólo falta que ver que $p^*(t)$ satisface la ecuación diferencial para p con $\lambda = 1$.

$$\begin{aligned}
\frac{dp^*}{dt}(t) &= -\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial x}(t, x^*(t)) \\
&= -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t}(t, x^*(t)) - \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial x}(t, x^*(t)) \cdot f(t, x^*(t), u^*(t)) \\
&= -\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial V}{\partial t}\Big)(t, x^*(t)) - \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial x}(t, x^*(t)) \cdot f(t, x^*(t), u^*(t)) \\
&= -\frac{\partial}{\partial x}\Big[H^1\Big(t, x, -\frac{\partial V}{\partial x}(t,x), u^*(t)\Big)\Big]\Big|_{x = x^*(t)} - \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial x}(t, x^*(t)) \cdot f(t, x^*(t), u^*(t)) \\
&= -\frac{\partial H^1}{\partial x}\Big(t, x^*(t), -\frac{\partial V}{\partial x}(t, x^*(t)), u^*(t)\Big) \\
&= -\frac{\partial H^1}{\partial x}\Big(t, x^*(t), p^*(t), u^*(t)\Big),
\end{aligned}$$

donde hemos usado que $\frac{\partial H^1}{\partial p} = f$. Esto prueba el teorema. $\square$

EJERCICIO 2.13 (Problemas LQ): Para un problema LQ, a partir de la solución obtenida mediante programación dinámica, comprobar que $p(t) = -P(t)x(t)$ donde la matriz $P(t)$ debe satisfacer la ecuación diferencial de Riccati, con $P(T) = 0$.

3. Sistemas Lagrangianos y Hamiltonianos

Los sistemas de la Mecánica Clásica se describen por medio de los formalismos Lagrangiano y/o Hamiltoniano. En el formalismo Lagrangiano las trayectorias son los puntos críticos del funcional acción. Veremos en este apartado que dichos sistemas pueden ser descritos por medio del principio del máximo de Pontryagin.

Consideremos un sistema mecánico definido por una función Lagrangiana $L(t, x, v)$, usualmente diferencia entre la energía cinética y potencial del sistema. Fijados dos tiempos $t_0 < t_1$ y dos puntos $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, las trayectorias del sistema mecánico son los puntos críticos del funcional acción

$$S(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t))\, dt,$$

definido en el conjunto de curvas $x = \gamma(t)$ que satisfacen $x(t_0) = x_0$ y $x(t_1) = x_1$. Nótese que no se exige que las trayectorias minimicen la acción, simplemente que sean puntos críticos.

Podemos reformular el problema anterior como un problema de control óptimo tomando como control la velocidad de la curva $\dot{x} = u$. De esta manera, debemos encontrar los puntos críticos del problema

$$\begin{array}{ll} \text{optimizar} & \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} L(t, x, u)\, dt \\ \text{sujeto a} & \dot{x} = u \\ & x(t_0) = x_0 \\ & x(t_1) = x_1. \end{array}$$

Aplicando el principio del máximo, formamos el Hamiltoniano de Pontryagin,

$$H(t, x, p, u) = p^{\mathsf{T}} u - L(t, x, u),$$

a partir del cual, las ecuaciones a verificar son

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial H}{\partial u}(t, x, p, u) = p - \frac{\partial L}{\partial v}(t, x, u) \\ \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p}(t, x, p, u) = u \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x, p, u) = \frac{\partial L}{\partial x}(t, x, u). \end{aligned}$$

A partir de aquí podemos seguir dos caminos, que nos conducirán respectivamente a la formulación Lagrangiana y a la Hamiltoniana.

De la segunda ecuación tenemos $u = \dot{x}$ y sustituyendo en la primera obtenemos $p = \frac{\partial L}{\partial v}(t, x, \dot{x})$. Finalmente, sustituyendo este valor de p en la primera llegaoms a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x, \dot{x})\right) = \frac{\partial L}{\partial x}(t, x, \dot{x}),$$

que son las ***ecuaciones de Lagrange*** de la Mecánica.

Alternativamente, podemos intentar despejar el control u en función del resto de variables. Según el teorema de la función implícita, esto será posible (al menos localmente) si $\frac{\partial^2 L}{\partial u \partial u}$ es una matriz invertible, en cuyo caso diremos que el Lagrangiano L es regular. En este caso, obtendremos $u = U(t, x, p)$ y sustituyendo en el Hamiltoniano de Pontryagin obtenemos la función

$$H^*(t, x, p) = p^{\mathsf{T}} U(t, x, p) - L(t, x, U(t, x, p)),$$

que se denomina función ***Hamiltoniana*** (clásica) del sistema mecánico. A partir de ésta, las ecuaciones de Pontryagin resultan

$$\dot{x} = \frac{\partial H^*}{\partial p}(t,x,p) \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H^*}{\partial x}(t,x,p),$$

que se denomianan ***ecuaciones de Hamilton*** de la Mecánica.

El último paso dado no es obvio, y su demostración es como sigue. Por un lado, dado que $u = U(t,x,p)$ es la solución de la ecuación $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ tenemos que

$$\frac{\partial H}{\partial u}(t,x,p,U(t,x,p)) = 0, \qquad \text{para todo } (t,x,p).$$

Aplicando, ahora, la regla de la cadena

$$\begin{aligned}\frac{\partial H^*}{\partial x}(t,x,p) &= \frac{\partial}{\partial x}H(t,x,p,U(t,x,p)) \\ &= \frac{\partial H}{\partial x}(t,x,p,U(t,x,p)) + \frac{\partial H}{\partial u}(t,x,p,U(t,x,p))\frac{\partial U}{\partial x}(t,x,p) \\ &= \frac{\partial H}{\partial x}(t,x,p,U(t,x,p)).\end{aligned}$$

Igualmente,

$$\begin{aligned}\frac{\partial H^*}{\partial p}(t,x,p) &= \frac{\partial}{\partial p}H(t,x,p,U(t,x,p)) \\ &= \frac{\partial H}{\partial p}(t,x,p,U(t,x,p)) + \frac{\partial H}{\partial u}(t,x,p,U(t,x,p))\frac{\partial U}{\partial p}(t,x,p) \\ &= \frac{\partial H}{\partial p}(t,x,p,U(t,x,p)).\end{aligned}$$

De esta manera, las derivadas de H que aparecen podemos tomarlas antes o después de sustituir $u = U(t,x,p)$.

La ecuación de Hamiton-Jacobi-Bellmann reduce a la conocida ecuación de Hamilton-Jacobi de la Mecánica Hamiltoniana

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) = H^*(t,x,-\frac{\partial V}{\partial x}(t,x))$$

una vez sustituido en H el valor crítico $u = U(t,x,p)$. Se deduce de aquí, que si V es una solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi, entonces podemos encontrar las trayectorias del sistema mecánico resolviendo

$$\dot{x} = -\frac{\partial H^*}{\partial x}\Big(t,x,-\frac{\partial V}{\partial x}(t,x)\Big)$$

siendo el momento asociado

$$p(t) = -\frac{\partial V}{\partial x}(t,x(t)).$$

En la Mecánica, es costumbre tomar el signo contrario y usar la función $S(t,x) = -V(t,x)$, de forma que las ecuación de Hamilton-Jacobi queda

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t,x) + H^*\Big(t,x,\frac{\partial S}{\partial x}(t,x)\Big) = 0.$$

La ecuación diferencial de las trayectorias es $\dot{x} = \frac{\partial H^*}{\partial p}\big(t,x,\frac{\partial S}{\partial x}(t,x)\big)$, junto con la ecuación para el momento $p = \frac{\partial S}{\partial x}(t,x)$. La función $S(t,x)$ es igual al valor del funcional acción sobre la trayectoria del sistema (supuesta su existencia y unicidad) que conecta los puntos x_0 en tiempo t_0 con x_1 en tiempo t_1.

Destaquemos finalmente que las relaciones entre la Teoría de Control Óptimo y la Mecánica Clásica, especialmente en el formalismo simpléctico, van mucho más allá de lo explicado en esta breve sección.

Eduardo Martínez: IUMA and Departamento de Matemática Aplicada, Facultad de Ciencias, Universidad de Zaragoza, 50009 Zaragoza, Spain

E-mail address: emf@unizar.es